参考答案

第一章　三角函数

§1　周期变化

【课前预习】

知识点一

周期　周期

诊断分析

(1)√　(2)×

知识点二

1. $f(x+T)=f(x)$　2. 最小的正数　最小正数

诊断分析

(1)√　(2)×　(3)×　(4)√　**[解析]** (2)有的函数不是周期函数,如 $y=x+1$ 就不是周期函数.

(4)因为函数 $f(x)$ 的周期为 10,所以 $f(41)=f(4\times10+1)=f(1)=2025$.

【课中探究】

探究点一

例 1　解:(1)地球每天自转一圈,并且每一天总会重复前一天的动作,因此是周期现象.

(2)连续抛掷一枚骰子,朝上一面的点数有可能为 $1,2,\cdots,6$,并且前一次出现的点数下一次可能出现,也可能不出现,故出现的点数是随机的,因此不是周期现象.

(3)钟表秒针的转动,每一分钟转一圈,并且每分钟总是重复前一分钟的动作,因此是周期现象.

(4)某段高速公路每天通过的车辆数会因为时间、天气、交通状况等因素而发生变化,没有一个确定的规律,因此不是周期现象.

变式　解:每星期有 7 天,从星期一到星期日,且呈周期性变化,其周期为 7,$\because 8=7+1$,$\therefore$第 8 天是星期一.

$\because 121=17\times7+2$,$\therefore$第 121 天是星期二.

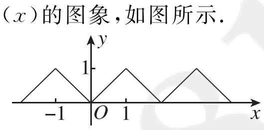
探究点二

例 2　解:(1)由题意知,当 $-1\leqslant x<0$ 时,$f(x)=-x$,当 $0\leqslant x<1$ 时,$f(x)=x$.当 $2n-1\leqslant x<2n(n\neq0)$时,$f(x)=2n-x=-(x-2n)$,因为 $2n-1\leqslant x<2n(n\neq0)$,所以 $-1\leqslant x-2n<0$,所以 $-(x-2n)=f(x-2n)$,则 $f(x)=f(x-2n)$.

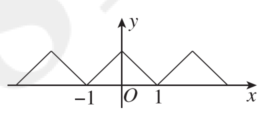
当 $2n\leqslant x<2n+1(n\neq0)$时,同理可得 $f(x)=f(x-2n)$.

所以函数 $f(x)$ 的周期为 $2n(n\neq0)$,最小正周期为 2.

画出函数 $y=f(x)$ 的图象,如图所示.



(2)函数 $y=f(x+1)$ 的图象可由函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位长度得到,则函数 $y=f(x+1)$ 的图象如图所示.



变式　解:(1)由 $f(x)$ 的图象可知,函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2.

(2)当 $4\leqslant x\leqslant5$ 时,设 $f(x)=k_1x+b_1$,

则 $\begin{cases}f(4)=4k_1+b_1=2,\\f(5)=5k_1+b_1=0,\end{cases}$解得 $\begin{cases}k_1=-2,\\b_1=10.\end{cases}$当 $5\leqslant x\leqslant6$ 时,由函数 $f(x)$ 的周期性可知 $f(6)=2$,结合 $f(x)$ 的图象可设 $f(x)=k_2x+b_2$,则 $\begin{cases}f(5)=5k_2+b_2=0,\\f(6)=6k_2+b_2=2,\end{cases}$解得 $\begin{cases}k_2=2,\\b_2=-10.\end{cases}$

所以当 $x\in[4,6]$时,$f(x)=\begin{cases}10-2x,4\leqslant x\leqslant5,\\2x-10,5<x\leqslant6,\end{cases}$

即 $f(x)=|2x-10|$.

例 3　(1)A　**[解析]** 因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cdot f(x+2)=13$,所以 $f(x+2)\cdot f(x+4)=13$,可得 $f(x)=f(x+4)$,则函数 $f(x)$ 为周期函数且周期为 4,则 $f(99)=f(4\times24+3)=f(3)$.因为 $f(1)=2$,$f(1)\cdot f(3)=13$,所以 $f(3)=\frac{13}{2}$,所以 $f(99)=\frac{13}{2}$.故选 A.

(2)**解:**因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,又 $f(-x)=-f(x+2)$,所以 $f(x)=-f(x+2)$,得 $f(x+2)=-f(x+4)$,所以 $f(x)=f(x+4)$,所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 4.

变式　解:(1)证明:$\because f(x+2)=-f(x)$,$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,$\therefore f(x)$是周期为 4 的周期函数.

(2)当 $x\in[-2,0]$时,$-x\in[0,2]$,由已知得 $f(-x)=2(-x)-(-x)^2=-2x-x^2$,

又 $f(x)$是奇函数,$\therefore f(-x)=-f(x)=-2x-x^2$,

$\therefore$当 $x\in[-2,0]$时,$f(x)=x^2+2x$.

当 $x\in[2,4]$时,$x-4\in[-2,0]$,$\therefore f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)$,又 $f(x)$是周期为 4 的周期函数,

$\therefore f(x)=f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)=x^2-6x+8$.

$\therefore$当 $x\in[2,4]$时,$f(x)=x^2-6x+8$.

(3)由题可知,$f(0)=0$,$f(1)=1$,$f(2)=0$,$f(3)=-1$.

$\because f(x)$是周期为 4 的周期函数,$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=\cdots=f(2016)+f(2017)+f(2018)+f(2019)=f(2020)+f(2021)+f(2022)+f(2023)=0$,又 $f(2024)+f(2025)=f(0)+f(1)=0+1=1$,$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)=1$.

§2　任意角

2.1　角的概念推广

2.2　象限角及其表示

【课前预习】

知识点一

1. 端点 O　顶点　始边　终边
2. (1)逆时针　(2)顺时针　(3)重合　(4)整数倍

知识点二

角的终边　第几象限角　象限

诊断分析

(1)×　(2)×　(3)×　(4)×　(5)√

知识点三

$\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$　整数倍

诊断分析

1. (1)√　(2)√　(3)√　(4)√　**[解析]** (3)因为在 $-360°\sim0°$ 范围内,终边在 y 轴的负半轴上的角为 $-90°$ 角,所以终边在 y 轴的负半轴上的角 α 的集合是$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(4)因为在 $0°\sim360°$ 范围内,第三象限角 β 的范围是 $180°<\beta<270°$,所以由终边相同的角的表示方法知,角 α 的集合可以表示为$\{\alpha|k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$.

2. **解:**终边相同的角不一定相等,它们可以相差 360°的整数倍.相等的角终边相同.

【课中探究】

探究点一

例 1　(1)①②　(2)$-900°$　(3)顺　20°　360°角

[解析] (1)始边相同而终边不同的角一定不相等,故①正确;若两个角的始边与终边分别重合,则两个角相差 360°的整数倍,故②正确;0°角小于 180°角,但它既不是钝角也不是直角或锐角,故③不正确.综上所述,正确的结论为①②.

(2)所求分针转过的角度为$(-360°)\times\left(2+\frac{1}{2}\right)=-900°$.

(3)因为负角是按顺时针方向旋转形成的角,所以 $-20°$ 角是按顺时针方向旋转 20°所成的角.按逆时针方向旋转形成的角是正角,故体操运动员按逆时针方向转体 360°所成的角是 360°角.

探究点二

例 2　(1)C　(2)D　(3)B　**[解析]** (1)$-75°$角是第四象限角,故①正确;225°角是第三象限角,故②正确;$540°=360°+180°$,该角的终边在 x 轴的负半轴上,不属于任何象限,故③错误;$-315°=-360°+45°$,该角是第一象限角,故④正确.故选 C.

(2)终边在 x 轴上的角的集合为$\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,终边在 y 轴上的角的集合为$\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$,以上两个集合的并集为$\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$,故选 D.

(3)由题知，$-90°+360°\cdot k<\alpha<360°\cdot k,k\in\mathbf{Z}$，则 $90°-360°\cdot k<90°-\alpha<180°-360°\cdot k,k\in\mathbf{Z}$，故 $90°-\alpha$ 的终边在第二象限，故选 B.

变式 C 【解析】由 α 与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称可知，若 α 是第二象限角，则 $-\alpha$ 一定是第三象限角. 故选 C.

例 3 解：与 10 030°角终边相同的角的一般形式为 $\beta=k\cdot360°+10\ 030°(k\in\mathbf{Z})$.

(1)由 $-360°<k\cdot360°+10\ 030°<0°(k\in\mathbf{Z})$，得 $-10\ 390°<k\cdot360°<-10\ 030°(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k=-28$，故所求的最大负角为 $-28\times360°+10\ 030°=-50°$.

(2)由 $0°<k\cdot360°+10\ 030°<360°(k\in\mathbf{Z})$，得 $-10\ 030°<k\cdot360°<-9670°(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k=-27$，故所求的最小正角为 $-27\times360°+10\ 030°=310°$.

(3)由 $360°\leqslant k\cdot360°+10\ 030°<720°(k\in\mathbf{Z})$，得 $-9670°\leqslant k\cdot360°<-9310°(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k=-26$，故所求的角为 $-26\times360°+10\ 030°=670°$.

变式 (1)D (2)C 【解析】(1)与 $-30°$角终边相同的角的集合 $S=\{\theta|\theta=-30°+360°\cdot k,k\in\mathbf{Z}\}$，当 $k=1$ 时，$\theta=330°$，故 $330°$角的终边与 $-30°$角的终边相同. 故选 D.

(2)因为 $-1050°=-360°\times3+30°$，所以与 $-1050°$角终边相同的最小正角是 $30°$. 故选 C.

探究点三

例 4 解：由题图可知，终边落在图中阴影部分内(含边界)的角 β 的集合可以表示为 $\{\beta|k\cdot360°-30°\leqslant\beta\leqslant k\cdot360°+135°,k\in\mathbf{Z}\}$.

变式 解：终边落在题图①中阴影部分内(包括边界)的角的集合可以表示为 $\{\alpha|45°+180°\cdot k\leqslant\alpha\leqslant90°+180°\cdot k,k\in\mathbf{Z}\}$. 终边落在题图②中阴影部分内(包括边界)的角的集合可以表示为 $\{\beta|-150°+360°\cdot k\leqslant\beta\leqslant120°+360°\cdot k,k\in\mathbf{Z}\}$.

拓展 解：因为 α 是第二象限角，所以 $k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\frac{k}{2}\cdot360°+45°<\frac{\alpha}{2}<\frac{k}{2}\cdot360°+90°(k\in\mathbf{Z})$. 当 k 为偶数时，令 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$，得 $n\cdot360°+45°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+90°$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角；

当 k 为奇数时，令 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$，得 $n\cdot360°+225°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+270°$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

综上，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角.

§3 弧度制

3.1 弧度概念

3.2 弧度与角度的换算

【课前预习】

知识点一

1 1 rad 弧度数 弧度制

诊断分析

(1)× (2)√

知识点二

1. 2π $360°$ π $180°$
2. $60°$ $180°$ 0 $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$ 2π

知识点三

$\frac{n\pi r}{180}$ αr

诊断分析

解：(1)设扇形的半径为 R，弧长为 l，$\alpha(0<\alpha<2\pi)$ 为其圆心角的弧度数，$n(0<n<360)$ 为圆心角的角度数. 因为 $\alpha=\frac{n\pi}{180}$，$l=\frac{n\pi R}{180}$，所以 $S=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n\pi}{180}\cdot R^2=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\alpha R^2$.

(2)扇形的面积公式与三角形的面积公式类似. 实际上，扇形与等腰三角形类似，扇形可看作一个曲边等腰三角形，弧是底，半径是底上的高.

【课中探究】

探究点一

例 1 (1)ABC (2)D 【解析】(1)无论是用角度制还是用弧度制度量角，角的大小均与圆的半径的大小无关，而与弧长和半径的比值有关，故 D 错误，A，B，C 均正确. 故选 ABC.

(2)1 弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角的大小.

探究点二

探索 解：角度制与弧度制互化的关键是牢记 $180°=\pi$ rad，充分利用 $1°=\frac{\pi}{180}$ rad 和 1 rad$=\frac{180°}{\pi}$进行换算. α rad$=\alpha\cdot\frac{180°}{\pi}$；$n°=n\cdot\frac{\pi}{180}$ rad.

例 2 解：(1)$20°=20\times\frac{\pi}{180}$ rad$=\frac{\pi}{9}$ rad.

(2)$-15°=-15\times\frac{\pi}{180}$ rad$=-\frac{\pi}{12}$ rad.

(3)$\frac{7}{12}\pi$ rad$=\frac{7\pi}{12}\times\frac{180°}{\pi}=105°$.

(4)$-\frac{11}{5}\pi$ rad$=-\frac{11\pi}{5}\times\frac{180°}{\pi}=-396°$.

变式 解：(1)$36°=36\times\frac{\pi}{180}$ rad$=\frac{\pi}{5}$ rad.

(2)$-10°30'=-10.5°=-\frac{21}{2}\times\frac{\pi}{180}$ rad$=-\frac{7\pi}{120}$ rad.

(3)1.2 rad$=\frac{6}{5}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{216°}{\pi}$.

(4)$-\frac{7\pi}{8}$ rad$=-\frac{7\pi}{8}\times\frac{180°}{\pi}=-157°30'$.

例 3 解：(1)$\because -1500°=-1800°+300°=-5\times360°+300°$，

$\therefore -1500°=-10\pi+\frac{5\pi}{3}$，是第四象限角.

(2)$\because \frac{23\pi}{6}=2\pi+\frac{11\pi}{6}$，$\therefore \frac{23\pi}{6}$ 与 $\frac{11\pi}{6}$ 的终边相同，是第四象限角.

(3)$\because -4=-2\pi+(2\pi-4)$，$\frac{\pi}{2}<2\pi-4<\pi$，

$\therefore -4$ 与 $2\pi-4$ 的终边相同，是第二象限角.

变式 (1)BC 【解析】因为终边相同的角相差了 360°的整数倍，且 $260°=\frac{13\pi}{9}$，所以与 260°角的终边相同的角的集合为 $\{\beta|\beta=260°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$ 或 $\left\{\beta\middle|\beta=\frac{13\pi}{9}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$. 故选 BC.

(2)解：因为函数 $y=x$ 与 $y=-x$ 的图象分别是第一、三象限和第二、四象限的角平分线，故角的终边落在第四象限的角平分线上时，可取对应的角为 $-\frac{\pi}{4}$，角的终边落在第一象限的角平分线上时，可取对应的角为 $\frac{\pi}{4}$，则所有终边落在题图中阴影部分内(含边界)的角的集合可表示为 $\left\{\beta\middle|-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

探究点三

例 4 (1)A (2)2 2 【解析】(1)由弧长公式可得所求弧长为 $2\times5=10$(cm). 故选 A.

(2)设 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 l，$OA=r$，则 $l=4-2r$. $\because S_{扇形}=\frac{1}{2}lr$，$\therefore \frac{1}{2}(4-2r)r=1$，可得 $r=1$ cm，$\therefore l=2$ cm. 设$\angle AOB$ 的弧度数为 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$，则 $\alpha=\frac{l}{r}=\frac{2}{1}=2$(rad).

变式 (1)270π cm^2 (2)B 【解析】(1)设扇形的弧长为 l. $\because 108°=108\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{5}\pi$，$\therefore l=\frac{3}{5}\pi\times30=18\pi$(cm)，故扇形的面积为 $\frac{1}{2}\times18\pi\times30=270\pi$(cm^2).

(2)方法一：设扇形的半径为 $r\left(0<r<\frac{a}{2}\right)$，则扇形的弧长 $l=a-2r$，扇形的面积 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(a-2r)r=-r^2+\frac{a}{2}r$，由二次函数的知识得，当 $r=-\frac{\frac{a}{2}}{2\times(-1)}=\frac{a}{4}$ 时，扇形的面积

$S=-r^2+\frac{a}{2}r$ 取得最大值，此时，扇形的弧长 $l=a-2r=a-2\times\frac{a}{4}=\frac{a}{2}=2r$，故所求扇形圆心角的弧度数为 $\frac{l}{r}=2$. 故选 B.

方法二：设扇形的半径为 $r\left(0<r<\frac{a}{2}\right)$，弧长为 $l(l>0)$，则 $a=l+2r$，由基本不等式可知，扇形的面积 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{4}l\cdot 2r\leqslant\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{l+2r}{2}\right)^2=\frac{a^2}{16}$，当且仅当 $l=2r$ 时取等号，此时，扇形的圆心角的弧度数为 $\frac{l}{r}=2$. 故选 B.

§4　正弦函数和余弦函数的概念及其性质

4.1　单位圆与任意角的正弦函数、余弦函数定义

【课前预习】

知识点一

1. (1)纵坐标 v　横坐标 u

诊断分析

(1)×　(2)√

知识点二

诊断分析

(1)×　(2)×　(3)√　(4)×　**【解析】**(4)∵α 是第四象限角，∴$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，∴$m<0$.

【课中探究】

探究点一

例 1　$-\frac{3\sqrt{5}}{5}$　**【解析】**由题意知 $\sin\theta=\frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $2\sin\theta+\cos\theta=-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

例 2　**解：**由题可得，点 P 与坐标原点间的距离 $r=\sqrt{(-4m)^2+(3m)^2}=5|m|$，所以 $\sin\alpha=\frac{3m}{5|m|}$，$\cos\alpha=\frac{-4m}{5|m|}$. 当 $m>0$ 时，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，故 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{5}$；当 $m<0$ 时，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，故 $2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{2}{5}$.

变式　(1)$\frac{\sqrt{5}}{5}$　(2)D　**【解析】**(1)由题可知，点 P 与坐标原点间的距离 $r=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，∴$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)依题意知 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{3}$，解得 $m=\pm 2\sqrt{2}$. 故选 D.

探究点二

例 3　**解：**设 O 为原点，当角 α 的终边在第四象限时，在直线 $y=-3x$ 上取点 $P_1(1,-3)$，则 $r_1=OP_1=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$，$\sin\alpha=\frac{-3}{r_1}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

所以 $2\sin\alpha+3\cos\alpha=-\frac{6}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$；

当角 α 的终边在第二象限时，在直线 $y=-3x$ 上取点 $P_2(-1,3)$，则 $r_2=OP_2=\sqrt{10}$，$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，所以 $2\sin\alpha+3\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

综上，$2\sin\alpha+3\cos\alpha=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

变式　**解：**∵角 α 的终边与直线 $y=3x$ 的一部分重合，$\sin\alpha<0$，∴点 $P(m,n)$ 位于直线 $y=3x$ 在第三象限的部分上，则 $m<0$，$n<0$，$n=3m$. ∵$OP=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{10}|m|=-\sqrt{10}m=\sqrt{10}$，∴$m=-1$，$n=-3$，∴$m-n=2$.

探究点三

例 4　**解：**(1)①∵$\pi<\frac{4\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$，∴$\frac{4\pi}{3}$ 为第三象限角，则 $\sin\frac{4\pi}{3}<0$.

②∵$\frac{\pi}{2}<3<\pi$，∴3 为第二象限角，则 $\cos 3<0$.

③∵$\frac{3\pi}{2}<\frac{5\pi}{3}<2\pi$，∴$\frac{5\pi}{3}$ 为第四象限角，则 $\sin\frac{5\pi}{3}<0$，$\cos\frac{5\pi}{3}>0$，故 $\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{3}<0$.

(2)∵$\sin\alpha>0$，∴α 的终边在第一、二象限或 y 轴的正半轴上，∵$\cos\alpha<0$，∴α 的终边在第二、三象限或 x 轴的负半轴上. 故当 $\sin\alpha>0$ 且 $\cos\alpha<0$ 时，α 的终边在第二象限.

[一题多变]

1. [变条件]本例(2)中条件变为“$\sin\alpha\cos\alpha<0$”，问题不变.

解：由 $\sin\alpha\cos\alpha<0$ 知 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$ 或 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$. 故 α 的终边在第二、四象限.

2. [变条件]本例(2)中条件变为“若点 $P(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 在第三象限”，问题不变.

解：由条件知 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$，故 α 的终边在第三象限.

变式　(1)A　(2)$-2<a\leqslant 3$　**【解析】**(1)因为 $\sin\theta\cos\theta>0$，且 $|\cos\theta|=\cos\theta$，所以 $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$，所以 θ 是第一象限角，故选 A.

(2)∵$\cos\alpha\leqslant 0$，$\sin\alpha>0$，α 的终边过点 $(3a-9,a+2)$，∴$\begin{cases}3a-9\leqslant 0,\\a+2>0,\end{cases}$ ∴$-2<a\leqslant 3$.

4.2　单位圆与正弦函数、余弦函数的基本性质

【课前预习】

知识点

R　**R**　$[-1,1]$　$[-1,1]$　1　-1　1　-1　2π

诊断分析

(1)×　(2)×　(3)√

【课中探究】

探究点一

例 1　**解：**(1)由 $y=4-\cos x$ 易知其定义域为 **R**.

(2)由题意知 $2\sin x+1\geqslant 0$，即 $\sin x\geqslant-\frac{1}{2}$. 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 内满足上述条件的 x 的取值范围为 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，由此可得函数的定义域为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

变式　(1)$(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$　(2)$\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$　**【解析】**(1)由题意知 $\sin x>0$. 因为在 $[0,2\pi]$ 内满足 $\sin x>0$ 的 x 的取值范围为 $0<x<\pi$，所以所求定义域为 $(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)要使函数有意义，需满足 $\begin{cases}\sin x>0,\\\frac{1}{2}-\cos x\geqslant 0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}2k\pi<x<\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\\\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 即 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x<2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

探究点二

例 2　**解：**(1)$y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减.

(2)$y=\cos x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递增，在区间 $[0,\pi]$ 上单调递减，在区间 $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

变式　**解：**因为函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减，所以函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$.

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{\max}=1$；当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$y_{\min}=-\frac{1}{2}$.

探究点三

例 3 **解**：(1)∵$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，∴$-\frac{1}{2}<\cos x\leqslant 1$，故函数 $y=\cos x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值域是 $\left(-\frac{1}{2},1\right]$.

(2)∵$\sin x\in[-1,1]$，且 $m\neq 0$，∴当 $m>0$ 时，$y=m\sin x+n$ 的最大值是 $n+m$，最小值是 $n-m$；当 $m<0$ 时，$y=m\sin x+n$ 的最大值是 $n-m$，最小值是 $n+m$.

变式 (1)D (2)$\frac{1}{2}$ $-\frac{\pi}{3}$ **【解析】**(1)因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以当 $\sin x=1$ 时，$y=2\sin x+a$ 取得最大值 $2+a$，故 $2+a=-2$，所以 $a=-4$. 故选 D.

(2)函数 $y=\cos\alpha$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，且 $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故当 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$ 时，$y=\cos\alpha$，$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 取得最小值 $\frac{1}{2}$.

4.3 诱导公式与对称

【课前预习】

知识点

$-\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $-\sin\alpha$ $-\cos\alpha$ $-\sin\alpha$ $-\cos\alpha$ $\sin\alpha$ $-\cos\alpha$

诊断分析

(1)√ (2)× (3)× (4)√

【课中探究】

探究点一

例 1 **解**：(1)$\sin 1920^\circ=\sin(5\times 360^\circ+120^\circ)=\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)$\cos\left(-\frac{26}{3}\pi\right)=\cos\left(-10\pi+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

(3)$\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right)=\cos\left(-6\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4)原式$=\sin\left(-4\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{4}$.

探究点二

探索 同名三角函数值 名 象限

例 2 (1)B (2)D (3)$-\frac{4}{5}$ **【解析】**(1)因为 $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$，且 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{2}{3}$，所以 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=-\frac{2}{3}$.

(2)由题意得 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]=-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\pi\right]=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$.

变式 (1)C **【解析】**∵$\sin\left(\frac{\pi}{8}+\theta\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$，∴$\sin\left(\theta-\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}+\theta-\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{8}+\theta\right)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$. 故选 C.

(2)**解**：∵$-\frac{\pi}{6}+\alpha+\frac{7}{6}\pi-\alpha=\pi$，∴$\frac{7}{6}\pi-\alpha=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$，∴$\cos\left(\frac{7}{6}\pi-\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(-\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=-\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{5}{13}$.

探究点三

探索 四 三 二 四

例 3 **解**：(1)原式$=\frac{\sin(-\theta)\sin(-\theta)\cos(-\theta)}{\cos(-\theta)\cos(\pi-\theta)\sin(\pi+\theta)}=\frac{(-\sin\theta)(-\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta(-\cos\theta)(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

(2)原式$=\frac{\sin(4\times 360^\circ+\alpha)\cdot\cos(3\times 360^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ+\alpha)\cdot[-\sin(180^\circ+\alpha)]}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos(-\alpha)}{(-\cos\alpha)\cdot\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha}=-1$.

变式 **解**：∵$\sin(\alpha-3\pi)=2\cos(\alpha-4\pi)$，∴$-\sin(3\pi-\alpha)=2\cos(4\pi-\alpha)$，∴$-\sin(\pi-\alpha)=2\cos(-\alpha)$，∴$\sin\alpha=-2\cos\alpha$，可知 $\cos\alpha\neq 0$，故 $\frac{\sin(\pi-\alpha)+5\cos(2\pi-\alpha)}{-2\cos\alpha-\sin(-\alpha)}=\frac{\sin\alpha+5\cos\alpha}{-2\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{3\cos\alpha}{-4\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

拓展 **解**：方法一：当 k 为偶数时，设 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$，

则原式$=\frac{\sin(2m\pi-\alpha)\cos[(2m-1)\pi-\alpha]}{\sin[(2m+1)\pi+\alpha]\cos(2m\pi+\alpha)}=\frac{\sin(-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)\cos\alpha}=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{-\sin\alpha\cos\alpha}=-1$；

当 k 为奇数时，设 $k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$，同理可得原式$=-1$.

方法二：因为 $k\pi-\alpha+k\pi+\alpha=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$(k+1)\pi+\alpha+(k-1)\pi-\alpha=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\cos[(k-1)\pi-\alpha]=\cos[(k+1)\pi+\alpha]=-\cos(k\pi+\alpha)$，$\sin[(k+1)\pi+\alpha]=-\sin(k\pi+\alpha)$，$\sin(k\pi-\alpha)=-\sin(k\pi+\alpha)$，

所以原式$=\frac{-\sin(k\pi+\alpha)[-\cos(k\pi+\alpha)]}{-\sin(k\pi+\alpha)\cos(k\pi+\alpha)}=-1$.

4.4 诱导公式与旋转

【课前预习】

知识点一

1. $(-v,u)$ $\cos\alpha$ $-\sin\alpha$ 2. $(v,-u)$ $-\cos\alpha$ $\sin\alpha$

诊断分析

解：由角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边与角 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称，得 $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$. 由角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边与角 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 的终边关于直线 $x=0$ 对称，得 $P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

知识点二

$\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $-\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $-\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $\sin\alpha$ $-\cos\alpha$ $-\sin\alpha$ $-\cos\alpha$ $\cos\alpha$ $-\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $\sin\alpha$

诊断分析

(1)√ (2)√ (3)√

【课中探究】

探究点一

例 1 (1)-0.3 (2)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (3)$\frac{1}{3}$ **【解析】**(1)由 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-0.3$，得 $\sin\alpha=0.3$，所以 $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha=-0.3$.

(2)由题意得 $\sin(105^\circ+\alpha)=\sin[180^\circ+(\alpha-75^\circ)]=-\sin(\alpha-75^\circ)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(3)因为 $\frac{\pi}{3}-\alpha+\frac{\pi}{6}+\alpha=\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$.

变式 D **【解析】** $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{3}$. 故选 D.

探究点二

例 2　解：(1) 原式 $=\dfrac{\cos[-(\pi-\alpha)]}{\sin\alpha}\cdot\sin\left[-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right](-\sin\alpha)=\dfrac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\left[-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right](-\sin\alpha)=\dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)=-\cos^2\alpha$.

(2)证明：左边 $=\dfrac{-\sin\alpha(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{-\sin\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha}=-1=$ 右边，所以原式得证.

变式　解：$\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(3\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\sin(-\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi+\alpha\right)}=\dfrac{-\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot\sin\alpha}{-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=-\sin\alpha$.

探究点三

例 3　解：(1) $f(\alpha)=\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\pi-\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)}{\cos\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha}=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(2)因为角 α 的终边过点 $P(-12,5)$，

所以 $x=-12$，$y=5$，

则 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$，所以 $f(\alpha)=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{5}{12}$.

变式　解：(1) $f(\alpha)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\pi+\alpha)\sin(-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)\cdot(-\cos\alpha)}{-\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=\cos\alpha$.

(2)因为 $f(\alpha)=\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，且 α 为第四象限角，

所以 $\sin\alpha=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，则 $2\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha=2\times\dfrac{9}{10}+3\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\dfrac{9}{10}$.

§5　正弦函数、余弦函数的图象与性质再认识

5.1　正弦函数的图象与性质再认识

【课前预习】

知识点一

2. (2)$(0,0)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\dfrac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$

诊断分析

(1)√　(2)√　(3)√

知识点二

诊断分析

(1)√　(2)×　(3)√　(4)×

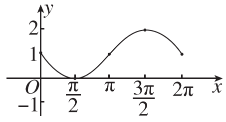
【课中探究】

探究点一

例 1　解：(1)取值列表：

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=1-\sin x$	1	0	1	2	1

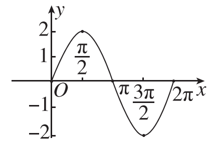
(2)描点连线，如图所示.



变式　解：(1)列表：

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=2\sin x$	0	2	0	-2	0

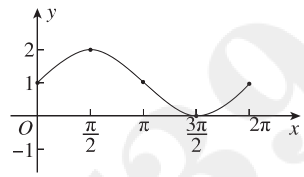
描点连线，如图所示.



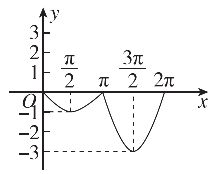
(2)列表：

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点，并将它们用光滑的曲线顺次连接起来，如图.



拓展　解：由题可得 $f(x)=\begin{cases}-\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi,\\3\sin x,\pi<x\leqslant2\pi,\end{cases}$ 其图象如图所示.



由图可知，当 $k>0$ 或 $k<-3$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 0 个交点；

当 $k=-3$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 1 个交点；当 $-3<k<-1$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 2 个交点；当 $k=0$ 或 $k=-1$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 3 个交点；

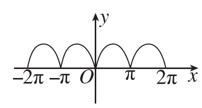
当 $-1<k<0$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 4 个交点.

探究点二

例 2　解：(1)∵ $\sin\dfrac{1}{2}x=\sin\left(\dfrac{1}{2}x+2k\pi\right)=\sin\dfrac{1}{2}(x+4k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq0$，∴ $y=\sin\dfrac{1}{2}x$ 的周期是 $4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq0$，取 $k=1$，得 $y=\sin\dfrac{1}{2}x$ 的最小正周期是 4π.

(2)作出 $y=|\sin x|$ 的图象，如图.

由图可知 $y=|\sin x|$ 的最小正周期为 π.



(3)∵ $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right)=\sin\left[2(x+k\pi)+\dfrac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq0$，∴函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的周期是 $k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq0$，取 $k=1$，得最小正周期为 π.

例 3　解：(1)由题可知 $f(x)=x\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且其定义域关于原点对称. ∵ $f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，∴ $f(x)$ 为偶函数.

(2)由题可知 $f(x)=|\sin x|+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且其定义域关于原点对称. ∵ $f(-x)=|\sin(-x)|+1=|-\sin x|+1=|\sin x|+1=f(x)$，∴ $f(x)$ 为偶函数.

变式　D　**【解析】** 设 $g(x)=ax^3+b\sin x$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g(-x)=-ax^3-b\sin x=-g(x)$，故 $g(x)$ 为奇函数. $f(x)=g(x)+4$，由 $f(-5)=g(-5)+4=m$，得 $g(-5)=m-4$，所以 $f(5)=g(5)+4=-g(-5)+4=-m+4+4=-m+8$. 故选 D.

例 4　解：∵ $y=-\sin x+3$ 与 $y=\sin x$ 的单调性相反，

而 $y=\sin x$ 的单调递增区间是 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间是 $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，

∴函数 $y=-\sin x+3$ 的单调递增区间是 $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间是 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

变式 **解**：由 $\sin x>0$ 得 $2k\pi<x<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$.

$\because 0<\frac{1}{2}<1$，$\therefore$ 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin x$ 的单调递增区间即为 $u=\sin x(x\in(2k\pi,2k\pi+\pi),k\in\mathbf{Z})$ 的单调递减区间，故函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right),k\in\mathbf{Z}$.

例5 **解**：(1)因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<0$，正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递增，所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$.

(2)因为 $0<3<\pi,\pi<4<\frac{3\pi}{2}$，

所以 $\sin 3>0,\sin 4<0$，故 $\sin 3>\sin 4$.

(3) $\sin\frac{6\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{5}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{5}$，$\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{5}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{5}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=-\sin\frac{3\pi}{10}$. 因为 $0<\frac{\pi}{5}<\frac{3\pi}{10}<\frac{\pi}{2}$，且 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $\sin\frac{\pi}{5}<\sin\frac{3\pi}{10}$，所以 $-\sin\frac{\pi}{5}>-\sin\frac{3\pi}{10}$，故 $\sin\frac{6\pi}{5}>\cos\frac{6\pi}{5}$.

例6 **解**：(1) $\because 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0\leqslant\sin x\leqslant 1$，$\therefore 0\leqslant 2\sin x\leqslant 2$，

$\therefore$ 原函数的值域为 $[0,2]$.

(2) $y=-2\sin^2x+5\sin x-2=-2\left(\sin x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$.

$\because -1\leqslant\sin x\leqslant 1$，$\therefore y_{\min}=-2\times(-1)^2+5\times(-1)-2=-9$，$y_{\max}=-2\times1^2+5\times1-2=1$.

故函数 $y=-2\sin^2x+5\sin x-2$ 的值域是 $[-9,1]$.

变式 **解**：(1) $\because x\in\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$，$\therefore \sin x\in[-1,1]$，故 $f(x)=-2\sin x+1\in[-1,3]$，即 $f(x)$ 的值域为 $[-1,3]$.

(2)令 $t=\sin x$，$g(t)=2t^2+2t-\frac{1}{2}$.

$\because x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant 1$，即 $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$，

又 $g(t)=2t^2+2t-\frac{1}{2}=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1$，$\therefore 1\leqslant g(t)\leqslant\frac{7}{2}$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[1,\frac{7}{2}\right]$.

拓展 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ **【解析】** 令 $t=\sin x,t\in[-1,1]$，则 $y=\frac{3-t}{3+t}=\frac{6-(3+t)}{3+t}=\frac{6}{3+t}-1$，$\because -1\leqslant t\leqslant 1$，$\therefore 2\leqslant t+3\leqslant 4$，$\therefore \frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{3+t}\leqslant\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{3}{2}\leqslant\frac{6}{3+t}\leqslant 3$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant\frac{6}{3+t}-1\leqslant 2$，则函数 $y=\frac{3-\sin x}{3+\sin x}$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

5.2 余弦函数的图象与性质再认识

【课前预习】

知识点一

诊断分析

(1)√ (2)√ (3)√ (4)√

知识点二

$[-1,1]$ 偶函数 1 -1

诊断分析

(1)√ (2)× (3)√ (4)×

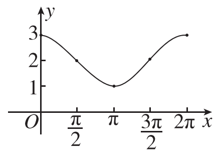
【课中探究】

探究点一

例1 **解**：列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1
$y=2+\cos x$	3	2	1	2	3

描点，并将它们用光滑的曲线顺次连接起来，如图.

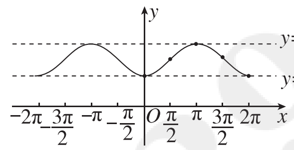


变式 **解**：①列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1
$y=1-\frac{1}{3}\cos x$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$

②描点连线，即可作出 $y=1-\frac{1}{3}\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象.

因为该函数为偶函数，所以作出关于 y 轴对称的图象，从而得到 $y=1-\frac{1}{3}\cos x$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的图象，如图.



探究点二

例2 **解**：(1) $\because f(x)=2+\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=2+\cos(-x)=2+\cos x=f(x)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)=2+\cos x$ 为偶函数.

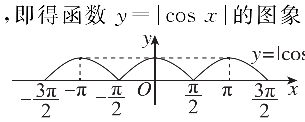
(2) $\because y=\cos x$ 在每一个区间 $[2k\pi-\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上都单调递增，在每一个区间 $[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上都单调递减，

$\therefore f(x)=2+\cos x$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间为 $[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$.

(3)由 $y=\cos x$ 的周期性知，$f(x)=2+\cos x$ 的最小正周期为 2π.

变式 **解**：$y=|\cos x|=\begin{cases}\cos x,x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z}),\\-\cos x,x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

作出函数 $y=\cos x$ 的图象后，将 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方，即得函数 $y=|\cos x|$ 的图象，如图.



由图可知，$y=|\cos x|$ 是偶函数，最小正周期 $T=\pi$，单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，单调递减区间为 $\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

例3 **解**：(1)因为函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递减，$0<1<2<\pi$，所以 $\cos 1>\cos 2$.

(2) $\cos\frac{15\pi}{8}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$，

$\cos\frac{14\pi}{9}=\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{9}\right)=\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)=\cos\frac{4\pi}{9}$，

因为函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，$\pi>\frac{4\pi}{9}>\frac{\pi}{8}>0$，

所以 $\cos\frac{4\pi}{9}<\cos\frac{\pi}{8}$，即 $\cos\frac{15\pi}{8}>\cos\frac{14\pi}{9}$.

例4 $\left[-2,\frac{1}{4}\right]$ **【解析】** $y=-\cos^2x+\cos x=-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$. 因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，所以当 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{4}$；当 $\cos x=-1$ 时，$y_{\min}=-2$. 所以函数 $y=-\cos^2x+\cos x$ 的值域是 $\left[-2,\frac{1}{4}\right]$.

变式 **解**：易知 $y=-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant 1$. 所以当 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{4}$；当 $\cos x=1$

时，$y_{\min}=0$. 所以函数的取值范围为$\left[0,\frac{1}{4}\right]$.

§6　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质与图象

6.1　探究 ω 对 $y=\sin\omega x$ 的图象的影响

6.2　探究 φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$的图象的影响

6.3　探究 A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的影响

第1课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象

【课前预习】

知识点一

1. (1)$\frac{1}{\omega}$　$\frac{1}{\omega}$　(2)频率

2. (1)左　右　$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$　(2)初相　相位

3. (1)纵　A　(2)振幅　4. $|\varphi|$　$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$

诊断分析

(1)√　(2)×　(3)√　(4)×　**【解析】**(1)将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ 的图象.

(2)将函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，可得 $y=\sin x$ 的图象.

(3)将函数 $y=\sin x$ 图象上各点的纵坐标变为原来的 2 倍(横坐标不变)，得到函数 $y=2\sin x$ 的图象.

(4)把函数 $y=\sin 3x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得到 $y=\sin 3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{3}{4}\pi\right)$的图象.

知识点二

0　$\frac{\pi}{2}$　π　$\frac{3\pi}{2}$　2π

诊断分析

(1)√　(2)√

【课中探究】

探究点一

例1　C　**【解析】**将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{3}$，纵坐标不变，可以得到函数 $y=\sin 3x$ 的图象，故选 C.

变式　D　**【解析】**将函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$图象上的点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标保持不变，所得图象对应的函数解析式为 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. 故选 D.

例2　B　**【解析】**为了得到函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$的图象，只需把函数 $y=2\sin 2x$ 图象上的所有的点向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度. 故选 B.

变式　(1)A　(2)A　**【解析】**(1)把函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到的图象所对应的函数解析式为 $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故选 A.

(2)$y=\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$. 设 $f(x)=\sin 2x=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$，则 $f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，∴只需将 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度. 故选 A.

例3　(1)BD　**【解析】**有两种变换方法：一种是先把函数 $y=3\sin x$ 的图象上所有点向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到函数 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$的图象，再把所得图象上各点的横坐标伸长到原来的 4 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{12}\right)$的图象，故 A 错误，B 正确；另一种是先把函数 $y=3\sin x$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 4 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=3\sin\frac{x}{4}$的图象，再把所得图象上所有点向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数 $y=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{12}\right)$的图象，故 C 错误，D 正确. 故选 BD.

(2)**解**：将函数 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{1}{2}\right)$的图象向右平移$\frac{3}{2\pi}$个单位长度，可得函数 $y=2\cos\left[\frac{\pi}{3}\left(x-\frac{3}{2\pi}\right)+\frac{1}{2}\right]=2\cos\frac{\pi}{3}x$ 的图象，再把所得图象上所有点的横坐标伸长为原来的$\frac{\pi}{3}$倍(纵坐标不变)，可得 $y=2\cos x$ 的图象，最后把所得图象上所有点的纵坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$(横坐标不变)，可得 $y=\cos x$ 的图象.

变式　(1)C　(2)A　**【解析】**(1)将 $f(x)=\sin 4x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，可得 $y=\sin 4\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，再将 $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象上每一个点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变)，可得 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，最后把所得图象上每一个点的纵坐标伸长为原来的 2 倍(横坐标不变)，可得 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，即 $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故选 C.

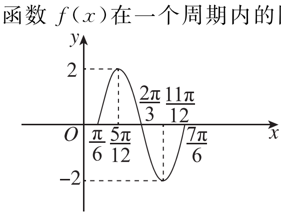
(2)令 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，将函数 $y=f(x)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，再将所得图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos x$ 的图象，故选 A.

探究点二

例4　**解**：根据题意，结合“五点法”完成表格，如下：

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
$2x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	2	0	-2	0

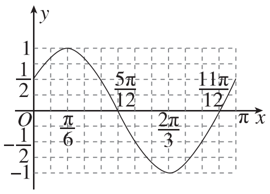
结合表格可得函数 $f(x)$在一个周期内的图象如图所示.



变式　**解**：$f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，列表如下：

$2x-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{11}{12}\pi$	π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$

结合表格可得函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上的图象如图所示.



第 2 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质的应用

【课前预习】

知识点

R　$[-A,A]$　$T=\frac{2\pi}{\omega}$　奇函数　偶函数　非奇非偶函数

$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\varphi\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$　$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\varphi\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$　$x=\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$

$\left(\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

诊断分析

(1)√　(2)×　(3)√　(4)×　**【解析】**(2)相邻的两条对称轴间的距离为半个周期.

(4)由 $x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,故函数 $f(x)$的图象的对称中心是$\left(k\pi-\frac{\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

【课中探究】

探究点一

例 1　(1)D　(2)1　**【解析】**(1)由题图可知,点$(0,2\sqrt{3})$在 $f(x)$的图象上,所以 $f(0)=4\cos\varphi=2\sqrt{3}$,则 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,$x=0$ 在 $f(x)$的一个单调递增区间内,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.由五点作图法可知,$\frac{2\pi}{9}\omega-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,解得 $\omega=3$,所以 $f(x)=4\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$,则 $f\left(-\frac{\pi}{18}\right)=4\cos\left[3\times\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2$,故选 D.

(2)设函数 $f(x)$的最小正周期为 T,则由题图可得 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,解得 $T=\pi$,因为 $\omega>0$,所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,解得 $\omega=2$.将$\left(\frac{\pi}{6},2\right)$代入解析式得 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$,即 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$,因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,即$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}+\varphi<\frac{5\pi}{6}$,故$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{5\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$.

变式　**解**:由最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3},-2\right)$,得 $A=2$.

∵相邻两个交点间的距离为$\frac{\pi}{2}$,

∴$f(x)$的最小正周期 $T=\pi$,得 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$.

由点 $M\left(\frac{2\pi}{3},-2\right)$在 $f(x)$的图象上,得 $2\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=-2$,即 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=-1$,则$\frac{4\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,∴$\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,又 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,∴$\varphi=\frac{\pi}{6}$,故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

探究点二

例 2　**解**:(1)由函数 $f(x)$的图象可知 $A=2$,$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$,∴$\omega=2$,即 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,将点$\left(-\frac{\pi}{12},2\right)$的坐标代入,得 $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$,

则$-\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

又 $0<\varphi<\pi$,∴$\varphi=\frac{2\pi}{3}$,即 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,则 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当 $x\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$时,$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]$,

故当 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$,即 $x=0$ 时,$f(x)_{\max}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,

当 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$,即 $x=\frac{5\pi}{12}$时,$f(x)_{\min}=2\times(-1)=-2$.

(3)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$,故当 $2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$,即 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$时,$f(x)$单调递减,当 $2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right]$,即 $x\in\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$时,$f(x)$单调递增,故当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.

变式 1　AC　**【解析】**对于 A 选项,$f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin 2x$,为奇函数,故 A 正确;对于 B 选项,因为$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$,所以 $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上不单调,故 B 错误;对于 C 选项,将函数 $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到函数 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$ 的图象,故 C 正确;对于 D 选项,因为$\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$,所以$\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,所以$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,所以 $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上的最小值为$-\frac{1}{2}$,故 D 错误.故选 AC.

变式 2　**解**:(1)∵$f(x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}(\omega>0)$,∴函数 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$,故 $\omega=2$,∴$f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 4x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得$\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)函数 $g(x)=f(x)+m$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上有两个零点,即关于 x 的方程$\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-2m-\sqrt{3}}{2}$在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上有两个不同的实根,即函数 $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$的图象与直线 $y=\frac{-2m-\sqrt{3}}{2}$有两个不同的交点.∵$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,∴$4x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$,结合正弦函数的单调性可知,要使函数 $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$的图象与直线 $y=\frac{-2m-\sqrt{3}}{2}$有两个不同的交点,则$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\frac{-\sqrt{3}-2m}{2}<1$,解得$-\frac{\sqrt{3}}{2}-1<m\leqslant-\sqrt{3}$,∴$m$ 的取值范围是$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1,-\sqrt{3}\right]$.

拓展 (1)$\frac{1}{6}$ (2)C **[解析]**(1)因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x+1$ $(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,所以$-\frac{3\pi}{2}\cdot 2\omega\geqslant-\frac{\pi}{2}$,且$\frac{\pi}{2}\cdot 2\omega\leqslant\frac{\pi}{2}$,可得 $\omega\leqslant\frac{1}{6}$,故 ω 的最大值为$\frac{1}{6}$.

(2)令 $f(x)=\sin(x+\varphi)-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$,得 $\sin(x+\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,当 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{2}\right]$时,$x+\varphi\in\left[\varphi,\varphi+\frac{5\pi}{2}\right]$,又 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{5\pi}{2}\leqslant\varphi+\frac{5\pi}{2}\leqslant 3\pi$.因为 $y=\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}$在$[0,3\pi]$上的零点为$\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{8\pi}{3}$,且 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{5\pi}{2}\right]$ 内恰有 3 个零点,所以 $\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3},\\ \frac{5\pi}{2}\leqslant\varphi+\frac{5\pi}{2}<\frac{8\pi}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{\pi}{3}<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{8\pi}{3}\leqslant\varphi+\frac{5\pi}{2}\leqslant 3\pi,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,故选 C.

§7 正切函数

7.1 正切函数的定义

7.2 正切函数的诱导公式

7.3 正切函数的图象与性质

【课前预习】

知识点一

$\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

知识点三

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$ $\mathbf{R}$ π

奇函数 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$

诊断分析

(1)× (2)√ (3)× (4)√ (5)√ (6)×

【课中探究】

探究点一

例 1 $-\frac{12}{13}$ $\frac{5}{13}$ $-\frac{12}{5}$ **[解析]** 因为 $x=5,y=-12$,所以 $r=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$,则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{12}{13}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{5}{13}$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{12}{5}$.

变式 **解:**由题可得 $r=\sqrt{(-4a)^2+(3a)^2}=5|a|$.

若 $a>0$,则 $r=5a$,角 α 的终边在第二象限,$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-4a}{5a}=-\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{3a}{-4a}=-\frac{3}{4}$;

若 $a<0$,则 $r=-5a$,角 α 的终边在第四象限,$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

探究点二

例 2 **解:**(1)$\tan 765°=\tan(4\times180°+45°)=\tan 45°=1$.

(2) $\tan\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=-\tan\frac{20\pi}{3}=-\tan\left(7\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

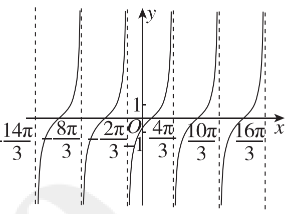
(3)原式$=\frac{\tan(180°+45°)+\tan(4\times180°+30°)}{-\tan 30°+\tan 45°}=\frac{\tan 45°+\tan 30°}{\tan 45°-\tan 30°}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$.

变式 (1)C **[解析]** $\tan 660°\tan(-30°)-\tan 225°+\tan 315°=\tan(360°\times2-60°)\tan(-30°)-\tan(180°+45°)+\tan(360°-45°)=\tan(-60°)\tan(-30°)-\tan 45°+\tan(-45°)=\tan 60°\tan 30°-\tan 45°-\tan 45°=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-1-1=-1$.故选 C.

(2)**解:**$\frac{\tan(540°-\alpha)\tan(\alpha-270°)\tan(\alpha+180°)}{\tan(\alpha-180°)\tan(810°+\alpha)\tan(-\alpha-360°)}=\frac{\tan(-\alpha)\tan(\alpha-90°)\tan\alpha}{\tan\alpha\tan(90°+\alpha)\tan(-\alpha)}=\frac{-\tan\alpha\cdot\left(-\frac{1}{\tan\alpha}\right)\cdot\tan\alpha}{\tan\alpha\cdot\left(-\frac{1}{\tan\alpha}\right)(-\tan\alpha)}=1$.

探究点三

例 3 **解:**令$-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$,得$-\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$,作出函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left(-\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$上的图象,将函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$在区间$\left(-\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$上的图象向左、右平移(每次平移 2π 个单位长度),就得到函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$的图象,如图所示.



由$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $x\neq 2k\pi+\frac{4\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,即函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq 2k\pi+\frac{4\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.函数的最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$.由 $k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}<k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{4\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,

即函数的单调递增区间为$\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

由$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,

即该函数图象的对称中心为$\left(k\pi+\frac{\pi}{3},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

变式 **解:**函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,

①令 $x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,整理得 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,

故函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{6}\right\}(k\in\mathbf{Z})$.

②最小正周期 $T=\pi$.

③令$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x+\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

整理得$-\frac{5\pi}{6}+k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,

所以函数的单调递增区间为$\left(-\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\pi+\frac{\pi}{6}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

④令 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,整理得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

所以该函数图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

探究点四

例 4 **解:**∵$\tan 2=\tan(2-\pi)$,$\tan 3=\tan(3-\pi)$,且$\frac{\pi}{2}<2<\pi$,

∴$-\frac{\pi}{2}<2-\pi<0$.∵$\frac{\pi}{2}<3<\pi$,∴$-\frac{\pi}{2}<3-\pi<0$.

显然$-\frac{\pi}{2}<2-\pi<3-\pi<1<\frac{\pi}{2}$,且 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,∴$\tan(2-\pi)<\tan(3-\pi)<\tan 1$,

即 $\tan 2<\tan 3<\tan 1$.

变式 **解:**(1)因为 $\tan\frac{13\pi}{4}=\tan\frac{\pi}{4}$,$\tan\frac{17\pi}{5}=\tan\frac{2\pi}{5}$,$0<\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$,$y=\tan x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,

所以 $\tan\frac{\pi}{4}<\tan\frac{2\pi}{5}$，即 $\tan\frac{13\pi}{4}<\tan\frac{17\pi}{5}$.

(2)因为 $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}$，$\tan\left(-\frac{16\pi}{5}\right)=-\tan\frac{\pi}{5}$，

$0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，$y=\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $\tan\frac{\pi}{4}>\tan\frac{\pi}{5}$，所以 $-\tan\frac{\pi}{4}<-\tan\frac{\pi}{5}$，

即 $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)<\tan\left(-\frac{16\pi}{5}\right)$.

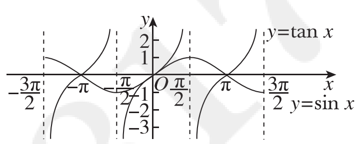
例 5 (1)C **[解析]** 由 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=0$，得 $x=\frac{\pi}{8}$，所以函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象的一条渐近线为直线 $x=\frac{\pi}{8}$，即直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 与函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象不相交. 故选 C.

(2)**解**：①∵函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴相邻两个交点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，即 $T=\frac{\pi}{2}$，∴$\omega=2$，∴$f(x)=\tan(2x+\varphi)$. ∵$f(x)$ 的图象关于点 $M\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称，∴$-2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，又∵$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，∴$\varphi=\frac{\pi}{4}$，则 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

②由①知，$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. 由 $-1\leqslant\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{3}$，得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，∴不等式组 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

变式 (1)$[-4,4]$ (2)3 **[解析]** (1)因为 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $-1\leqslant\tan x\leqslant 1$. 令 $\tan x=t$，则 $t\in[-1,1]$，$y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$，当 $t=-1$，即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$y_{\min}=-4$，当 $t=1$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y_{\max}=4$. 故所求函数的值域为 $[-4,4]$.

(2)在同一直角坐标系中，作出函数 $y=\tan x$ 与 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的图象，如图所示，



由图可知，函数 $y=\tan x$ 与 $y=\sin x$ 在 $x=-\pi,0,\pi$ 处的函数值都是 0，即在区间 $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上，两个函数的图象有 3 个交点.

拓展 $(0,1]$ **[解析]** ∵函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，∴$\begin{cases}\omega>0,\\ \frac{\pi}{|\omega|}\geqslant\pi,\end{cases}$ 解得 $0<\omega\leqslant 1$，经检验，满足题意，∴ω 的取值范围是 $(0,1]$.

§8 三角函数的简单应用

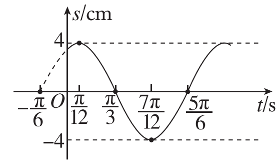
【课中探究】

探究点一

例 1 **解**：列表如下：

t	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2t+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0
s	0	4	0	-4	0

描点、连线，得 $s=4\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$，$t\in[0,+\infty)$ 的图象如图中实线部分所示.



(1)将 $t=0$ 代入 $s=4\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$，得 $s=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，所以小球在开始振动时的位移是 $2\sqrt{3}$ cm.

(2)由图可知，小球上升到最高点和下降到最低点时的位移分别是 4 cm 和 -4 cm.

(3)因为振动的周期是 π，所以小球往复振动一次所用的时间是 π s.

变式 **解**：(1)由题图知 $B=200$，最小正周期 $T=2\times\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{600}\right)=\frac{1}{100}$，∴$\omega=\frac{2\pi}{T}=200\pi$.

当 $t=\frac{1}{300}$ 时，$I=0$，即 $\sin\left(200\pi\times\frac{1}{300}+\varphi\right)=0$，∴$\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，∴$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

故所求的解析式为 $I=200\sin\left(200\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)依题意得最小正周期 $T\leqslant\frac{1}{50}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\frac{1}{50}(\omega>0)$，∴$\omega\geqslant 100\pi$，又 $314<100\pi<315$，$\omega\in\mathbf{N}^*$，∴ω 的最小正整数值为 315.

探究点二

例 2 **解**：(1)设 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B(A>0,\omega>0)$，易知 $t\in[0,30]$.

由题意知 $\begin{cases}A+B=90,\\-A+B=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=40,\\B=50.\end{cases}$ 由周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=30$ 得 $\omega=\frac{\pi}{15}$，故 $H(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+50$.

∵$H(0)=10$，∴$\sin\varphi=-1$，可取 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$，

∴$H(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+50=-40\cos\frac{\pi}{15}t+50$，

故 $H(t)$ 的解析式为 $H(t)=-40\cos\frac{\pi}{15}t+50$，$t\in[0,30]$.

(2)令 $H(t)=30$，则 $\cos\frac{\pi}{15}t=\frac{1}{2}$.

∵$t\in[0,30]$，∴$\frac{\pi}{15}t\in[0,2\pi]$，∴$\frac{\pi}{15}t=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{15}t=\frac{5\pi}{3}$，解得 $t=5$ 或 $t=25$，故游客甲坐上摩天轮 5 分钟或 25 分钟时，距离地面的高度恰好为 30 米.

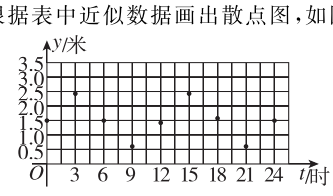
变式 **解**：(1)由题意可得，函数 $P(t)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{160\pi}=\frac{1}{80}$.

(2)根据公式 $f=\frac{1}{T}$，可得 $f=80$，即此人每分钟心跳的次数是 80.

(3)函数 $P(t)=115+25\sin 160\pi t$ 的最大值是 $115+25=140$，最小值是 $115-25=90$，即此人的血压在血压计上的读数为 140/90 mmHg，与标准值相比较偏高一点.

探究点三

例 3 **解**：(1)根据表中近似数据画出散点图，如图所示：



结合散点图可知，图形进行了上下平移和左右平移，故选

②$y=A\cos(\omega t+\varphi)+b$ 作为函数模型，

∴$A=\frac{2.4-0.6}{2}=0.9$，$b=\frac{2.4+0.6}{2}=1.5$.

∵$T=\frac{2\pi}{\omega}=12$，∴$\omega=\frac{\pi}{6}$，∴$y=0.9\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)+1.5$.

∵函数 $y=0.9\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)+1.5$ 的图象过点$(3,2.4)$，

∴$2.4=0.9\cos\left(\frac{\pi}{6}\times3+\varphi\right)+1.5$，∴$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=1$，

∴$\sin\varphi=-1$，又$-\pi<\varphi<0$，∴$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，∴$y=0.9\cos\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)+1.5=0.9\sin\frac{\pi}{6}t+1.5(0\leqslant t\leqslant24)$.

(2)由(1)知，$y=0.9\sin\frac{\pi t}{6}+1.5$，令 $y\geqslant1.05$，即 $0.9\sin\frac{\pi t}{6}+1.5\geqslant1.05$，∴$\sin\frac{\pi t}{6}\geqslant-\frac{1}{2}$，∴$2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}t\leqslant2k\pi+\frac{7\pi}{6}$ $(k\in\mathbf{Z})$，得 $12k-1\leqslant t\leqslant12k+7(k\in\mathbf{Z})$. 又∵$5\leqslant t\leqslant18$，∴$5\leqslant t\leqslant7$ 或 $11\leqslant t\leqslant18$，∴一天中安排5时至7时以及11时至18时组织训练，才能确保集训队员的安全.

本章总结提升

【知识辨析】

1. √ 2. √ 3. √ 4. × 5. × 6. × 7. √ 8. √

【素养提升】

题型一

例1 A 【解析】因为角α的终边经过点$(-3,m)$，且$\tan\alpha=\frac{2}{3}$，所以$\tan\alpha=\frac{m}{-3}=\frac{2}{3}$，解得$m=-2$，所以$\sin\alpha=\frac{-2}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}}=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$. 故选A.

变式 A 【解析】由$\sin\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$A(1,y)$是角$\theta$终边上一点，结合三角函数的定义，得$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，解得$y=-3$. 故选A.

题型二

例2 (1)A 【解析】由$\sin(\pi+\varphi)=-\frac{1}{3}$得$\sin\varphi=\frac{1}{3}$，所以$\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\varphi=\frac{1}{3}$，故选A.

(2)**解**：$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi+\alpha)\tan(-\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-\alpha)\sin(\pi-\alpha)\tan(-\alpha)}=\frac{(-\cos\alpha)(-\cos\alpha)(-\tan\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha(-\tan\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

变式 (1)D (2)$\frac{1}{2}$ 【解析】(1)由题得$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}$. 故选D.

(2)因为$f(\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha}{-\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)}=\cos\alpha$，所以$f\left(-\frac{13\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)=\cos\frac{13\pi}{3}=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

题型三

例3 (1)C (2)$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 【解析】(1)由$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant0$，可得$2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故$f(x)$的定义域为$\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. 故选C.

(2)由题意得$2|\sin x|-1\geqslant0$，则$|\sin x|\geqslant\frac{1}{2}$，易得$x\in\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

例4 (1)$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$ (2)D 【解析】(1)∵$-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，∴$-\frac{2\pi}{3}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}$，则$-\frac{1}{2}\leqslant\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant1$，∴$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$，∴$f(x)$的值域为$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$.

(2)设$\sin x=t$，∵$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，∴$t\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$. $f(x)=3-\sin x-2\cos^2x=2\sin^2x-\sin x+1$可转化为$g(t)=2t^2-t+1$. 易知$f(x)_{\max}=g(t)_{\max}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=g(1)=2$；$f(x)_{\min}=g(t)_{\min}=g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8}$. 故$f(x)$的最大值与最小值之差为$\frac{9}{8}$，故选D.

题型四

例5 (1)C (2)BC 【解析】(1)因为函数的最小正周期为π，所以排除A，B. 因为函数$y=\cos2x$在$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递增，所以函数$y=\cos2x$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递增，C符合题意. 因为函数$y=-\sin2x$在$\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递增，在$\left[\frac{3\pi}{4}+k\pi,\frac{5\pi}{4}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递减，所以函数$y=-\sin2x$在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$上单调递减，排除D. 故选C.

(2)方法一：$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为1，$g(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为1，故B，C均正确；因为$g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$，所以将$f(x)=\sin2x$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度可得$g(x)$的图象，又$\frac{\pi}{8}<\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，所以$f(x)$与$g(x)$的零点不相同，$f(x)$与$g(x)$的图象的对称轴不相同，故A，D均不正确. 故选BC.

方法二：$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为1，$g(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为1，故B，C均正确；令$f(x)=\sin2x=0$，得$x=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，令$g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$，得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，故$f(x)$与$g(x)$的零点不相同，A不正确；令$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，令$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，故$f(x)$与$g(x)$的图象的对称轴不相同，D不正确. 故选BC.

变式1 **解**：(1)由题意可知$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以$\omega=1$. $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，由$2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得$-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$f(x)$的单调递减区间为$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)因为$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，所以$-1\leqslant$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$，所以$-2\leqslant f(x)\leqslant 1$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的取值范围为$[-2,1]$.

变式 2 **解**：(1)由题意可知，$f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$图象的对称中心为$\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{k}{2}\pi,0\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2)因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$，所以$\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{7\pi}{12}$，

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$时，$f(x)$取得最大值，$f(x)_{\max}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$；当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$取得最小值，$f(x)_{\min}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

所以当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$时，$f(x)$的最大值为$\frac{1}{2}$，最小值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

题型五

例 6 (1)D **[解析]** 根据函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象，可得$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}$，$\therefore\omega=3$. 由 $f(x)$的图象，可得 $3\times\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$，$\therefore f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$. 故只需把 $g(x)=\cos 3x=\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，即可得到 $y=\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，故选 D.

(2)**解**：①由题可得$\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=2$，

所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)-b$.

因为 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]-b+\sqrt{3}$为奇函数，

所以$-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$且$-b+\sqrt{3}=0$，又 $0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$.

②因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，所以$\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，

所以 $0\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，所以$-\sqrt{3}\leqslant f(x)\leqslant 1-\sqrt{3}$，所以$-1-\sqrt{3}\leqslant f(x)-1\leqslant-\sqrt{3}$. 若$[f(x)]^2-(2+m)f(x)+2+m\leqslant 0$ 恒成立，则 $m\leqslant\frac{1}{f(x)-1}+f(x)-1$ 恒成立.

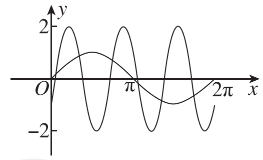
令 $t=f(x)-1$，$y=\frac{1}{t}+t$，则$-1-\sqrt{3}\leqslant t\leqslant-\sqrt{3}$，易知 $y=\frac{1}{t}+t$ 在$[-1-\sqrt{3},-\sqrt{3}]$上单调递增，

所以$\frac{1}{-1-\sqrt{3}}+(-1-\sqrt{3})\leqslant\frac{1}{f(x)-1}+f(x)-1\leqslant\frac{1}{-\sqrt{3}}-\sqrt{3}$，即$\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}\leqslant\frac{1}{f(x)-1}+f(x)-1\leqslant-\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 $m\leqslant\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$，即 m 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}\right]$.

变式 1 AB **[解析]** 将 $f(x)=\sin 2x+1$ 的图象向下平移 1 个单位长度，再向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到 $g(x)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象. 对于 A，$g(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 正确；对于 B，$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，为 $g(x)$的最大值，所以 $g(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称，故 B 正确；对于 C，$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\neq 0$，所以点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$不是 $g(x)$图象的对称中心，故 C 错误；对于 D，由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $g(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，故 D 错误. 故选 AB.

变式 2 C **[解析]** 画出函数 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$在$[0,2\pi]$上的图象，如图所示，由图可知两曲线共有 6 个交点. 故选 C.



变式 3 **解**：(1)将函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象上所有点向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度后，可得函数 $h(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$的图象，由题意可知，函数 $h(x)=\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$为奇函数，则 $\varphi-\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

(2)由(1)可知，$h(x)=\sin 2x$，则 $g(x)=h(x)-\frac{1}{2}=\sin 2x-\frac{1}{2}$，因为 $0<x<m$，所以 $0<2x<2m$，由 $g(x)=0$，可得 $\sin 2x=\frac{1}{2}$，又因为 $g(x)$在区间$(0,m)$上有且只有一个零点，所以$\frac{\pi}{6}<2m\leqslant\frac{5\pi}{6}$，解得$\frac{\pi}{12}<m\leqslant\frac{5\pi}{12}$. 因此，$m$ 的取值范围是$\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$.

题型六

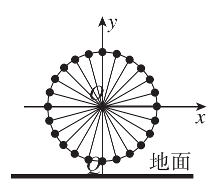
例 7 **解**：(1)依题意，当 $t=0$ s 时，以 x 轴的非负半轴为始边，OP_0 为终边的角是$-\frac{\pi}{6}$，因为水斗沿圆周匀速旋转一周需要 80 s，所以水斗转动的角速度 $\omega=\frac{2\pi}{80}=\frac{\pi}{40}$，

因此，水斗转动 t s 到点 P 时转过的角为 $\omega t=\frac{\pi}{40}t$，以 x 轴的非负半轴为始边，OP 为终边的角是$\frac{\pi}{40}t-\frac{\pi}{6}$，于是得点 P 的纵坐标为 $6\sin\left(\frac{\pi}{40}t-\frac{\pi}{6}\right)$，则 $h=6\sin\left(\frac{\pi}{40}t-\frac{\pi}{6}\right)+3$，

所以所求的函数关系式为 $h=6\sin\left(\frac{\pi}{40}t-\frac{\pi}{6}\right)+3(t\geqslant 0)$.

(2)当水斗再次到达水面时，$0<t<80$，所以$\frac{\pi}{40}t-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$，令 $h=6\sin\left(\frac{\pi}{40}t-\frac{\pi}{6}\right)+3=0$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{40}t-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，所以$\frac{\pi}{40}t-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，解得 $t=\frac{160}{3}$ s，即此水斗经过$\frac{160}{3}$ s 后再次到达水面. 在旋转一周的过程中，水斗位于水下的时间是 $80-\frac{160}{3}=\frac{80}{3}$(s).

变式 **解**：(1)以摩天轮中心 O 为原点，与地面平行的直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系.



由题意知，摩天轮运行的角速度 $\omega=$

$\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$(rad/min),摩天轮的半径为 50 m,

所以游客甲所在位置的纵坐标 $y_{甲}=50\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)$,

则 $H=50\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)+60=-50\cos\frac{\pi}{6}t+60$.

所以 H 关于 t 的函数解析式为 $H=-50\cos\frac{\pi}{6}t+60(t\geqslant 0)$.

(2)令 $H=85$,即 $-50\cos\frac{\pi}{6}t+60=85$,则 $\cos\frac{\pi}{6}t=-\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{6}t=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\frac{\pi}{6}t=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{N}$,

即 $t=4+12k$ 或 $t=8+12k,k\in\mathbf{N}$.

令 $k=0$,得 $t_1=4,t_2=8$;令 $k=1$,得 $t_3=16,t_4=20$.

故该游客坐上摩天轮后第四次达到最佳视觉效果的时刻 $t_4=$ 20 min.

第二章 平面向量及其应用

§1 从位移、速度、力到向量

1.1 位移、速度、力与向量的概念

1.2 向量的基本关系

【课前预习】

知识点一

(1)大小 方向 (2)大小 方向

诊断分析

②③④⑤ 这些量既有大小又有方向

知识点二

1. (1)方向和长度 2. (1)长度 方向

3. (1)0 **0** 或 $\vec{0}$ (2)1 个单位长度

诊断分析

1. (1)× (2)√

2. **解**:区别:0 是数量,**0** 是向量.联系:$|\mathbf{0}|=0$.

知识点三

1. 相等 相同 2. (1)相同或相反 (2)相等 相反

诊断分析

(1)× (2)√ (3)× (4)×

知识点四

1. 非零向量 $0°\leqslant\theta\leqslant 180°$ 夹角

2. $0°$ $180°$ $90°$ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ $\mathbf{0}\perp\boldsymbol{a}$

诊断分析

解:向量的夹角是指将两个非零向量平移到相同的起点后,它们的正向所成的角.向量夹角的取值范围是$[0,\pi]$.

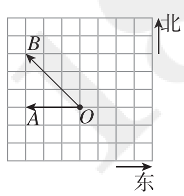
【课中探究】

探究点一

例 1 (1)A (2)C **[解析]** (1)结合向量的定义可知②③④错误,结合向量的定义以及共线向量的定义可知①正确.故选 A.

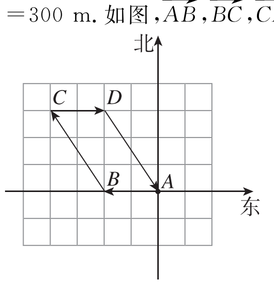
(2)零向量的方向是任意的,大小是 0,因此 A,B 不正确;零向量的长度为 0,故 C 正确;任意两个单位向量的方向不一定相同,故 D 不正确.故选 C.

例 2 **解**:(1)依题意,①②中要画出的向量分别如图中 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 所示.



(2)由图可知,$\triangle AOB$ 是等腰直角三角形,所以 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|=3$.

变式 **解**:(1)连接 BD,由题知 $BD\perp CD$,则 $|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{CD}|^2$,即 $|\overrightarrow{BD}|=300$ m.如图,$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ 即为所求.



(2)如图,作向量 $\overrightarrow{DA}$,由题意可知,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{BC}|=100\sqrt{13}$ m.

探究点二

例 3 A **[解析]** 对于①,由共线向量的定义可知,方向相反的两个向量也是共线向量,故①错误;对于②,长度相等、方向相同的两个向量是相等向量,故②正确;对于③,平行且模相等的两个向量的方向相同或相反,方向不一定相同,所以不一定是相等向量,故③错误;对于④,若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,则当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向不相同时,它们的模可能相等,故④错误.故选 A.

例 4 **解**:(1)由题意得 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AE}$.

(2)与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量为 $\overrightarrow{BF},\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DE}$.

(3)与 $\overrightarrow{AO}$ 的模相等的向量为 $\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DO},\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{CF},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{DE}$.

(4)不相等.

变式 **解**:(1)因为 E,F 分别是边 AC,AB 的中点,所以 $EF\parallel BC$,所以与 $\overrightarrow{EF}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{FE},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB}$.

(2)由(1)知 $EF\parallel BC$ 且 $EF=\frac{1}{2}BC$,又 D 是边 BC 的中点,故与 $\overrightarrow{EF}$ 的模相等的向量有 $\overrightarrow{FE},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CD}$.

(3)与 $\overrightarrow{EF}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{DB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$.

探究点三

例 5 **解**:(1)因为$\triangle ABC$ 是等边三角形,所以$\angle ABC=60°$,则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $180°-60°=120°$.

(2)若 E 为 BC 的中点,则由等边三角形的性质可得 $AE\perp BC$,故向量 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{EC}$ 的夹角为 $90°$.

变式 C **[解析]** 在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°,OC=OB$,因为$\angle OCB=30°$,所以$\angle OBC=30°$,所以$\angle BAC=60°$,即向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角等于 $60°$.故选 C.

§2 从位移的合成到向量的加减法

2.1 向量的加法

【课前预习】

知识点一

1. 两个向量和 2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}$ $\mathbf{0}+\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}$ $\mathbf{0}$

诊断分析

1. (1)× (2)× (3)×

2. **解**:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示"向东南方向航行$\sqrt{2}$ km".

知识点二

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

诊断分析

(1)√ (2)√ (3)√

【课中探究】

探究点一

例 1 (1)$\overrightarrow{AC}$ (2)$\overrightarrow{AO}$ (3)$\overrightarrow{AD}$ (4)$\mathbf{0}$ **[解析]** (1)由向量加法的平行四边形法则知,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

(2)$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}$.

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

(4)$\because\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD},\therefore\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.

探究点二

例 2 **解**:(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(2)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\mathbf{0}$.

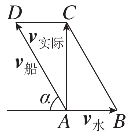
(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$.

变式 **解**:(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(2)$\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{GE}$.

探究点三

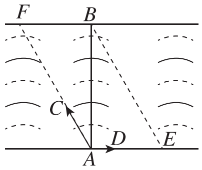
例 3 **解**:作出图形,如图.设船速 $\boldsymbol{v}_{船}$ 与岸边的夹角为 α,由图可知 $\boldsymbol{v}_{水}+\boldsymbol{v}_{船}=\boldsymbol{v}_{实际}$,结合已知条件,可得四边形 $ABCD$ 为平行四边形.



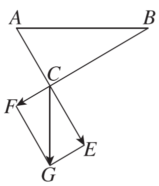
在 Rt△ACD 中,$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{v}_{水}|=10$,$|\overrightarrow{AD}|=|\boldsymbol{v}_{船}|=20$,∴$\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$,

∴$\alpha=60°$,故船行进的方向与水流的方向的夹角为 120°.

变式 (1)C (2)$5\sqrt{3}$ 5 **[解析]**(1)如图,以 $\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AC}$ 方向所在直线为邻边所在直线,AB 为对角线作平行四边形 $AEBF$,则 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}$.渡船经过 0.2 h 航行了 $0.2\times10=2$(km),即 $AF=2$ km,由题意,$AB=\sqrt{3}$ km,$\angle BAF=30°$,所以 $BF=1$ km.渡船在按 $\overrightarrow{AC}$ 方向航行时,江水沿 $\overrightarrow{AD}$ 方向流动,使渡船实际沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向到达北岸 B 码头,此时江水流动的距离为 $AE=BF=1$(km),则江水流动速度的大小为 $\dfrac{1}{0.2}=5$(km/h),故选 C.



(2)如图所示,设 $\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{CF}$ 分别表示 A,B 处所受的力,物体 W 的重力为 $\overrightarrow{CG}$,则 $|\overrightarrow{CG}|=10$ N,$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CG}$.易得 $\angle ECG=180°-150°=30°$,$\angle FCG=180°-120°=60°$.以 $\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{CF}$ 为邻边作▱$CEGF$,则 $|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{CG}|\cos30°=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$(N),$|\overrightarrow{CF}|=|\overrightarrow{CG}|\cos60°=10\times\dfrac{1}{2}=5$(N).所以 A 处所受力的大小为 $5\sqrt{3}$ N,B 处所受力的大小为 5 N.



2.2 向量的减法

【课前预习】

知识点

1. 相反向量 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 2. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ $\overrightarrow{BA}$ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

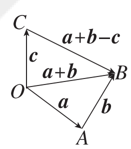
诊断分析

(1)√ (2)√ (3)√

【课中探究】

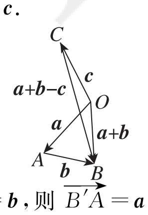
探究点一

例 1 **解**:如图所示,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,再作 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

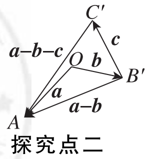


变式 **解**:在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$.

(1)如图所示,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,再作 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



(2)如图所示,作 $\overrightarrow{OB'}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{B'A}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,再作 $\overrightarrow{B'C'}=\boldsymbol{c}$,则 $\overrightarrow{C'A}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



探究点二

探索 **解**:一般满足首尾相连的形式或起点相同的形式.

例 2 (1)$\overrightarrow{CB}$ (2)$\mathbf{0}$ **[解析]**(1)方法一:$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$.

方法二:$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

方法三:$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

(2)方法一:$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.

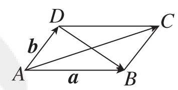
方法二:设点 O 为平面内任意一点,则 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$.

方法三:$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$.

变式 B **[解析]** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$.故选 B.

探究点三

探索 **解**:如图所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DB}$.



例 3 **解**:∵四边形 $ACDE$ 为平行四边形,

∴$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$,∴$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

变式 (1)C **[解析]** 依题意,$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$,即 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,故选 C.

(2)**解**:设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $|\overrightarrow{BA}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OACB$,则 $|\overrightarrow{OC}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

∵$(\sqrt{7}+1)^2+(\sqrt{7}-1)^2=4^2$,∴$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2$,

∴$OA\perp OB$,∴平行四边形 $OACB$ 是矩形.

∵矩形的对角线相等,∴$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}|=4$,即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=4$.

§3 从速度的倍数到向量的数乘

3.1 向量的数乘运算

3.2 向量的数乘与向量共线的关系

【课前预习】

知识点一

1. 向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ (1)相同 相反 $\mathbf{0}$ 任意
   (2)$|\lambda||\boldsymbol{a}|$ 向量的数乘

知识点二

1. (1)$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ (2)$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ (3)$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
2. 加法、减法和数乘

诊断分析

(1)× (2)× (3)×

知识点三

存在唯一 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

诊断分析

(1)× (2)√

【课中探究】

探究点一

例 1 (1)D (2)C **[解析]**(1)∵$\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$,$-\dfrac{1}{2}<0$,

∴$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相反,且 $|\boldsymbol{a}|=\left|-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\right|=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{b}|$,∴$|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$.故选 D.

(2)对于 A,$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 方向相同或相反,A 不正确;对于 B,当 $0<|\lambda|<1$ 时,$|-\lambda\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{a}|$,B 不正确;对于 C,因为 $\lambda^2>0$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 方向相同,C 正确;对于 D,$|\lambda\boldsymbol{a}|$ 是实数,$|\lambda|\boldsymbol{a}$ 是向量,不可能相等,D 不正确.故选 C.

变式 (1)D (2)$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ **[解析]**(1)如图,由 $\overrightarrow{AB}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ 知点 C 在线段 BA 的延长线上,且 $AC=\dfrac{1}{2}AB$,因此由向量数乘运算的定义知 A,B,C 中等式均成立,D 中等式不成立.故选 D.

(2)由题意可知 $2x-1>0$,即 $x>\dfrac{1}{2}$.

探究点二

例2 (1)AB **【解析】** 对于A，$m(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}$，A正确；对于B，$(m-n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{a}$，B正确；对于C，当$m=0$时，由$0\cdot\boldsymbol{a}=0\cdot\boldsymbol{b}$，不能得到$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，C错误；对于D，当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$时，由$m\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}$，不能得到$m=n$，D错误. 故选AB.

(2)**解**：①原式$=18\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}-18\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{b}$.

②原式$=\frac{1}{2}\left(3\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\right)-\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)-\frac{7}{6}\left(\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\boldsymbol{b}\right)=\frac{7}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{7}{6}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

变式 **解**：由题知$3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$①，$-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$②，由①×3+②×2，得$\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，代入①，得$3(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$，所以$\boldsymbol{y}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

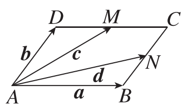
探究点三

例3 **解**：(1)因为$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

(2)因为$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AE}-\frac{1}{4}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$，所以$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

例4 **解**：如图，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.



∵M，N分别是DC，BC的中点，

∴$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

在△ADM和△ABN中，$\begin{cases}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM},\\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN},\end{cases}$

即$\begin{cases}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}①,\\ \boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}②,\end{cases}$ ①×2−②，得$\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}(2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$，②×2−①，

得$\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}(2\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})$，∴$\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\boldsymbol{d}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\boldsymbol{c}-\frac{2}{3}\boldsymbol{d}$.

变式 C **【解析】** 由题意知$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 故选C.

探究点四

例5 **解**：(1)证明：∵$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，而$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-2(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=-2\overrightarrow{AB}$，∴$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$共线，又$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$有公共点$B$，∴$A$，$B$，$C$三点共线.

(2)∵$8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$与$k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$共线，∴存在实数$\lambda$，使得$8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=\lambda(k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，即$(8-\lambda k)\boldsymbol{a}+(k-2\lambda)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

∵$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，∴$\begin{cases}8-\lambda k=0,\\ k-2\lambda=0,\end{cases}$解得$\lambda=\pm2$，∴$k=2\lambda=\pm4$.

变式 A **【解析】** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，故$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$，则$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BD}$，又因为向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$有公共点$B$，故$A$，$B$，$D$三点共线. 故选A.

拓展 **解**：由题意可知，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$，所以$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AN}$，又$\overrightarrow{AP}=\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AP}=\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$. 因为$B$，$P$，$N$三点共线，所以$\left(m+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=1$，解得$m=\frac{1}{3}$.

§4 平面向量基本定理及坐标表示

4.1 平面向量基本定理

【课前预习】

知识点一

1. 不共线 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 2. 不共线

知识点二

1. 互相垂直 3. 单位

诊断分析

(1)× (2)× (3)× (4)√

【课中探究】

探究点一

例1 (1)B (2)D **【解析】** (1)由平面向量基本定理可知，①中说法正确. 对于②，由平面向量基本定理可知，若基确定，则同一平面内任意一个向量在此基下的线性表示是唯一的，②中说法不正确. 对于③，取$\lambda_1=\lambda_2=0$，此时$\mu_1\boldsymbol{e}_2$与$\mu_2\boldsymbol{e}_2$共线，但$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$无意义，③中说法不正确. 故选B.

(2)对于A，$2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1=2\left(\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\right)$，则$2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$与$\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$共线，故$2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$不能构成平面向量的一组基，A错误；对于B，$6\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1=-3(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$，则$\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$与$6\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1$共线，故$\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$和$6\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1$不能构成平面向量的一组基，B错误；对于C，$2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1=-3\left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1\right)$，则$2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$与$-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1$共线，故$2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$和$-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1$不能构成平面向量的一组基，C错误；对于D，$\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$，则$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$与$\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$不共线，故$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$能构成平面向量的一组基，D正确. 故选D.

探究点二

例2 **解**：∵▱$ABCD$的对角线AC和BD交于点O，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，∴$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}=-\boldsymbol{a}$，

∴$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

故$\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

变式 (1)$\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$ (2)C **【解析】** (1)在四边形$ADMN$中，∵$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\overrightarrow{MN}+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\boldsymbol{0}$，∴$\overrightarrow{NM}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$.

(2)因为$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，所以$\lambda=-\frac{1}{6}$，$\mu=\frac{1}{3}$，故$\lambda+\mu=\frac{1}{6}$. 故选C.

探究点三

例3 **解**：设$\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{e}_2$，

则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.

∵A，P，M和B，P，N分别共线，∴存在实数λ，μ使得$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda\boldsymbol{e}_1-3\lambda\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$.

故$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2$.

又$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，∴由平面向量基本定理，

得$\begin{cases}\lambda+2\mu=2,\\ 3\lambda+\mu=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5},\\ \mu=\frac{3}{5}.\end{cases}$

∴$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BN}$，∴$\frac{AP}{PM}=4$，$\frac{BP}{PN}=\frac{3}{2}$.

变式 **证明**：设D，E，F分别是△ABC的三边BC，AC，AB的中点，连接AD，BE，CF，令$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，选取$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$为△$ABC$所在平面的一组基，则$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

设AD与BE交于点G_1，且$\overrightarrow{AG_1}=\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BG_1}=\mu\overrightarrow{BE}$，$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，则有$\overrightarrow{AG_1}=\lambda\boldsymbol{a}-\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BG_1}=-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

∵$\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG_1}=\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\boldsymbol{a}+(\mu-1)\boldsymbol{b}$，

$\therefore \begin{cases} \lambda = 1 - \dfrac{\mu}{2}, \\ -\dfrac{\lambda}{2} = \mu - 1, \end{cases}$ 解得 $\lambda = \mu = \dfrac{2}{3}$，$\therefore \overrightarrow{AG_1} = \dfrac{2}{3}\boldsymbol{a} - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

设 AD 与 CF 交于点 G_2，同理可得 $\overrightarrow{AG_2} = \dfrac{2}{3}\boldsymbol{a} - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

设 BE 与 CF 交于点 G_3，同理可得 $\overrightarrow{AG_3} = \dfrac{2}{3}\boldsymbol{a} - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

∴点 G_1, G_2, G_3 三点重合，即 AD, BE, CF 交于一点，

∴三角形的三条边的中线交于一点.

4.2 平面向量及运算的坐标表示

【课前预习】

知识点一

1. (x, y) (x, y) 2. $(1,0)$ $(0,1)$ $(0,0)$ 3. (x, y)

诊断分析

(1)√ (2)√ (3)√

知识点二

和 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ 差 $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ $(\lambda x_1, \lambda y_1)$

终点 起点

诊断分析

(1)√ (2)× (3)√ (4)√

知识点三

$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

诊断分析

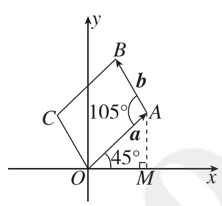
(1)× (2)× (3)√

【课中探究】

探究点一

例 1 (1)$(-4,0)$ $(0,6)$ $(-2,-5)$ **【解析】** 由题知 $\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{i} + 0 \cdot \boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b} = 0 \cdot \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$，所以 $\boldsymbol{a} = (-4,0)$，$\boldsymbol{b} = (0,6)$，$\boldsymbol{c} = (-2,-5)$.

(2)**解：**①作 $AM \perp x$ 轴于点 M，如图所示，



则 $OM = OA \cdot \cos 45° = 4 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$，

$AM = OA \cdot \sin 45° = 4 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$，

$\therefore A(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$，故 $\boldsymbol{a} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

$\because \angle AOC = 180° - 105° = 75°$，$\angle AOy = 45°$，$\therefore \angle COy = 30°$.

又 $\because OC = AB = 3$，$\therefore C\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，即 $\boldsymbol{b} = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

②$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

变式 **解：**根据题意，在平面直角坐标系 xOy 中，$|\boldsymbol{a}| = 2$，$|\boldsymbol{b}| = 3$，$|\boldsymbol{c}| = 3$，$\therefore \boldsymbol{a} = (|\boldsymbol{a}|\cos 45°, |\boldsymbol{a}|\sin 45°) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$，

$\boldsymbol{b} = (-|\boldsymbol{b}|\sin 30°, |\boldsymbol{b}|\cos 30°) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\boldsymbol{c} = (|\boldsymbol{c}|\cos 30°, -|\boldsymbol{c}|\sin 30°) = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

探究点二

例 2 **解：**(1)$2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = 2(-1,2) + 3(2,1) = (-2,4) + (6,3) = (4,7)$.

(2)$\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = (-1,2) - 3(2,1) = (-1,2) - (6,3) = (-7,-1)$.

(3)$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a} - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{2}(-1,2) - \dfrac{1}{3}(2,1) = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right) - \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \left(-\dfrac{7}{6}, \dfrac{2}{3}\right)$.

变式 (1)B (2)D **【解析】**(1)在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB} = (2,4)$，$\overrightarrow{AC} = (1,3)$，所以 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-1,-1)$，所以 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = (-3,-5)$. 故选 B.

(2)表示向量 $4\boldsymbol{a}$，$3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 的有向线段首尾相接能构成三角形，即 $4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = (-2,6) - (-6,12) = (4,-6)$. 故选 D.

探究点三

例 3 (1)A (2)A **【解析】**(1)由题意得 $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = (1-2m, -5)$，且 $\boldsymbol{b} \parallel (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})$，$\therefore -5m - 4(1-2m) = 0$，解得 $m = \dfrac{4}{3}$. 故选 A.

(2)由 A, B, C 三点共线，得 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共线，又 $\overrightarrow{AB} = (-3, m-3)$，$\overrightarrow{AC} = (-9, n-3)$，所以 $-3(n-3) = -9(m-3)$，整理得 $3m - n = 6$，故选 A.

变式 (1)$-\dfrac{1}{3}$ (2)$-\dfrac{1}{6}$ **【解析】**(1)$3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (0,-10)$，$\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} = (1+3k, -2+4k)$，因为 $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \parallel (\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b})$，所以 $0 - (-10-30k) = 0$，所以 $k = -\dfrac{1}{3}$.

(2)由题得 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (2m+3, 4)$，因为 A, B, D 三点共线，所以 $\overrightarrow{AB} = (2,3)$ 与 $\overrightarrow{BD} = (2m+3, 4)$ 共线，得 $2 \times 4 - 3 \times (2m+3) = 0$，解得 $m = -\dfrac{1}{6}$.

§5 从力的做功到向量的数量积

5.1 向量的数量积

【课前预习】

知识点一

1. 非零向量 $\angle AOB$ $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$ $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 0
2. $>$ $=$ $<$ $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

诊断分析

1. (1)× (2)× (3)√
2. **解：**向量的数量积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 是一个实数，不考虑方向；向量的数乘 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，既有大小，又有方向.

知识点二

1. 投影向量 3. $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$

知识点三

1. (1)$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ (2)$\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ $\boldsymbol{a} \cdot (\lambda\boldsymbol{b})$ (3)$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
2. (1)$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}\rangle$ (2)$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ (3)$|\boldsymbol{a}|^2$ $\sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ (4)$\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ (5)$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$

诊断分析

(1)√ (2)× (3)√ (4)×

【课中探究】

探究点一

例 1 **解：**设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

(1)当 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ 时，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\theta = 0°$，$\therefore \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|\cos 0° = 4 \times 5 = 20$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则 $\theta = 180°$，$\therefore \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|\cos 180° = 4 \times 5 \times (-1) = -20$.

(2)当 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 时，$\theta = 90°$，$\therefore \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|\cos 90° = 0$.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$ 时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|\cos 30° = 4 \times 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

变式 0 16 -16 **【解析】** 由题意知 $\angle ABC = 90°$，$\angle BAC = \angle BCA = 45°$，$AC = 4\sqrt{2}$，$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$，$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 45° = 4 \times 4\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 16$，$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 135° = 4\sqrt{2} \times 4 \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -16$.

探究点二

例 2 **解：**(1)因为 $|\boldsymbol{a}| = 3$，$|\boldsymbol{c}| = 1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $120°$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos 120° \cdot \dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} = -\dfrac{3}{2}\boldsymbol{c}$.

(2)因为 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 3|\boldsymbol{c}|\cos 120° + 4|\boldsymbol{c}|\cos 45°$，所以 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影数量为 $\dfrac{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} = 3\cos 120° + 4\cos 45° = 2\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}$.

变式 (1)B (2)3 **【解析】**(1)因为 $|\boldsymbol{a}| = 1$，$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2} \cdot \boldsymbol{b} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$. 故选 B.

(2)因为 $(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 2|\boldsymbol{a}|^2 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2 \times 3^2 - 3 \times 6 \times \cos 60° = 9$，所以 $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量为

$\dfrac{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{9}{3}=3$.

探究点三

例3 (1)7 (2)$\sqrt{13}$ **【解析】**(1)由题意得$|5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{25\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-10\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{25+9-10\times1\times3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=7$.

(2)因为$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4\times2^2-4\times1+1^2}=\sqrt{13}$.

变式 (1)$\sqrt{13}$ (2)6或$\sqrt{3}$ **【解析】**(1)因为$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{5\pi}{6}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\dfrac{5\pi}{6}=1\times\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$,所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4\times1^2-4\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$.

(2)当向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共线且同向时,它们两两夹角均为0°,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=6$.当向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共线时,设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$两两夹角均为$\theta$,则$3\theta=360°$,即$\theta=120°$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos120°=-1$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-3$,$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}$,又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=3$,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$.综上所述,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=6$或$\sqrt{3}$.

探究点四

例4 (1)A **【解析】**$\because\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|^2=-1$.设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,则$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$,又$0°\leqslant\theta\leqslant180°$,$\therefore\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为120°,故选A.

(2)**解**:①$\because(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$,$\therefore|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=\dfrac{1}{2}$.

$\because|\boldsymbol{a}|=1$,$\therefore|\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,则$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because0°\leqslant\theta\leqslant180°$,$\therefore\theta=45°$.

②$\because(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\dfrac{1}{2}$,$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\dfrac{5}{2}$,$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

设$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的夹角为$\alpha$,

则$\cos\alpha=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

变式 **解**:(1)由题意设$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则$\boldsymbol{b}=(\lambda,2\lambda)$,

又$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{5}$,$\therefore\sqrt{\lambda^2+(2\lambda)^2}=2\sqrt{5}$,$\therefore\lambda=\pm2$,$\therefore\boldsymbol{b}=(2,4)$或$\boldsymbol{b}=(-2,-4)$.

(2)由题可知$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$.$\because(-5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\therefore(-5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$,$\therefore-5\boldsymbol{a}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=0$,

即$-25-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\times20=0$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$.设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,则$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$,又$\theta\in[0,\pi]$,$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3}$,

$\therefore\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$.

5.2 向量数量积的坐标表示

【课前预习】

知识点

$x_1x_2+y_1y_2$ 坐标的乘积的和 (1)x^2+y^2 $\sqrt{x^2+y^2}$ (x_2-x_1,y_2-y_1) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2)$\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ $x_1x_2+y_1y_2=0$

诊断分析

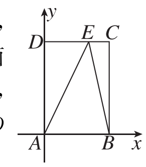
(1)√ (2)× (3)× (4)×

【课中探究】

探究点一

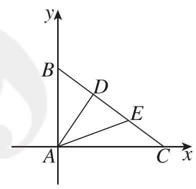
例1 (1)C **【解析】**$\because\boldsymbol{a}=(1,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$,$\therefore(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(1,0)\cdot(1,-1)=1$.

(2)**解**:以A为原点,$\overrightarrow{AB}$的方向为x轴正方向,$\overrightarrow{AD}$的方向为y轴正方向,建立如图所示的平面直角坐标系.$\because AB=\sqrt{2}$,$BC=2$,$\therefore A(0,0)$,$B(\sqrt{2},0)$,$C(\sqrt{2},2)$,$D(0,2)$.$\because$点E在边CD上,且$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$,$\therefore E\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$,$\therefore\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$,$\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3},2\right)$,$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=-\dfrac{4}{9}+4=\dfrac{32}{9}$.



变式 (1)C **【解析】**由题意可得$8\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(6,3)$,$\because(8\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=30$,$\boldsymbol{c}=(3,x)$,$\therefore18+3x=30$,解得$x=4$.

(2)**解**:在$\triangle ABC$中,$AB=3$,$AC=4$,$BC=5$,所以$BC^2=AB^2+AC^2$,所以$AB\perp AC$.以A为原点,建立如图所示的平面直角坐标系,则$A(0,0)$,$B(0,3)$,$C(4,0)$,因为点D,E分别是边BC上靠近B,C的三等分点,所以$D\left(\dfrac{4}{3},2\right)$,$E\left(\dfrac{8}{3},1\right)$,所以$\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{4}{3},2\right)$,$\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{8}{3},1\right)$,所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{4}{3},2\right)\cdot\left(\dfrac{8}{3},1\right)=\dfrac{32}{9}+2=\dfrac{50}{9}$.



探究点二

例2 C **【解析】**$\because\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\therefore\boldsymbol{a}^2=5$,又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$,$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=50$,即$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=50$,$\therefore5+2\times10+\boldsymbol{b}^2=50$,$\therefore\boldsymbol{b}^2=25$,$\therefore|\boldsymbol{b}|=5$.

变式 (1)D (2)1或-3 **【解析】**(1)依题意得$\boldsymbol{a}^2=2$,所以$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{2}\times2\times\cos45°=2$,所以$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{9\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{18+12+4}=\sqrt{34}$.

(2)因为$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k(1,1)-(0,-2)=(k,k+2)$,且$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的模等于$\sqrt{10}$,所以$\sqrt{k^2+(k+2)^2}=\sqrt{10}$,化简得$k^2+2k-3=0$,解得$k=1$或$k=-3$.

探究点三

例3 (1)A (2)3 **【解析】**(1)因为$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(2,-2)$,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\dfrac{3\times2+1\times(-2)}{\sqrt{3^2+1^2}\times\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.故选A.

(2)由题意得$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(2k-3,-6)$,$\boldsymbol{c}=(2,1)$,因为$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,所以$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4k-6-6=0$,解得$k=3$.

变式 (1)B **【解析】**因为$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(2\lambda+3,3)$,$\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=(-1,-1)$,$(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\perp(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$,所以$(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})=(2\lambda+3,3)\cdot(-1,-1)=-2\lambda-6=0$,解得$\lambda=-3$.

(2)**解**:由$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为钝角易知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不共线,即$-1+m<0$且$-m\neq1$,解得$m<1$且$m\neq-1$.

探究点四

例4 **解**:设$\boldsymbol{n}\perp l$,则$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}$,连接$AP$,则$\overrightarrow{AP}=(-2,0)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y)$,$\because\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}$,$\therefore x-y=0$,令$y=1$,得$x=1$,

此时$\boldsymbol{n}=(1,1)$,故点P到直线l的距离$d=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{|-2\times1+0\times1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.

变式 **解**:易知直线AB的方向向量为$\overrightarrow{AB}=(1,-2)$,连接$AP$,则$\overrightarrow{AP}=(2,4)$.设$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$,且$\boldsymbol{n}=(x,y)$,则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(x,y)\cdot(1,-2)=x-2y=0$,令$x=2$,则$y=1$,此时$\boldsymbol{n}=(2,1)$.故点$P(3,5)$到直线$AB$的距离$d=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{2\times2+4\times1}{\sqrt{5}}\right|=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

5.3 利用数量积计算长度与角度

【课中探究】

探究点一

例1 $[0,4]$ **【解析】** 由题意知$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为α,$\alpha\in[0,\pi]$,则$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8-8\cos\alpha$,$\because\alpha\in[0,\pi]$,$\therefore 0\leqslant 8-8\cos\alpha\leqslant 16$,$\therefore 0\leqslant|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 4$,即$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的取值范围为$[0,4]$.

变式 **解:** 设$D(t,0)(0\leqslant t\leqslant 1)$,易知$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+t,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,所以$|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|^2=\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(0\leqslant t\leqslant 1)$,所以当$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|^2$取得最小值,最小值为$\frac{1}{2}$,故$|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|$的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

探究点二

例2 $\frac{5}{6}\pi$ **【解析】** $\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\sqrt{3}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$\therefore\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$,$\therefore\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{c}^2+2\sqrt{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}^2$,$\because|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,$\therefore 1+3+2\sqrt{3}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=1$,$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\because\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle\in[0,\pi]$,$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{5}{6}\pi$.

变式 $1<\lambda<6$且$\lambda\neq\sqrt{6}$ **【解析】** $\because|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$45°$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 45°=\sqrt{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$. 当$2\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$与$\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$同向共线时,存在实数$m$,$m>0$,满足$2\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=m(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$,则$\begin{cases}2=m\lambda,\\-\lambda=-3m,\end{cases}$可得$\lambda=\sqrt{6}$. 若向量$2\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$与$\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$的夹角是锐角,则$(2\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})>0$且$\lambda\neq\sqrt{6}$,即$2\lambda\boldsymbol{a}^2+3\lambda\boldsymbol{b}^2-(6+\lambda^2)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$且$\lambda\neq\sqrt{6}$,即$4\lambda+3\lambda-(6+\lambda^2)>0$且$\lambda\neq\sqrt{6}$,即$\lambda^2-7\lambda+6<0$且$\lambda\neq\sqrt{6}$,得$1<\lambda<6$且$\lambda\neq\sqrt{6}$.

探究点三

例3 (1)D **【解析】** $\because\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$,$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$分别是与向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$同向的单位向量,$\therefore$根据菱形的几何性质得出$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$表示的向量在内角$A$的平分线所在直线上. $\because\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$,$\therefore$在$\triangle ABC$中,内角$A$的平分线与边$BC$垂直,$\therefore AB=AC$. $\because\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$,$\therefore 1\times 1\times\cos A=\frac{1}{2}$,即$A=60°$,又$AB=AC$,$\therefore\triangle ABC$为等边三角形. 故选D.

(2)**解:** 方法一:$\because A(1,2)$,$B(2,3)$,$C(-2,5)$,$\therefore\overrightarrow{AB}=(1,1)$,$\overrightarrow{BC}=(-4,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-3,3)$,$\therefore|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{5}$,$|\overrightarrow{AC}|=3\sqrt{2}$,$\therefore|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$,
$\therefore\triangle ABC$为直角三角形,且$\angle A=90°$.

方法二:$\because A(1,2)$,$B(2,3)$,$C(-2,5)$,$\therefore\overrightarrow{AB}=(1,1)$,$\overrightarrow{BC}=(-4,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-3,3)$,$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$\therefore\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,$\therefore\triangle ABC$为直角三角形,且$\angle A=90°$.

变式 **解:** (1)设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,

$\therefore|\overrightarrow{AD}|^2=\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)^2=\frac{4}{9}\boldsymbol{a}^2+2\times\frac{2}{9}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{9}\boldsymbol{b}^2=\frac{4}{9}\times 9+2\times\frac{2}{9}\times 3\times 3\times\cos 120°+\frac{1}{9}\times 9=3$.

故$AD=\sqrt{3}$.

(2)设$\angle DAC=\theta$,则θ为向量$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角. $\because\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{3}\times 3}=\frac{\frac{1}{3}\boldsymbol{b}^2+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{3\sqrt{3}}=\frac{\frac{1}{3}\times 9+\frac{2}{3}\times 3\times 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{3\sqrt{3}}=0$,$\therefore\theta=90°$,即$\angle DAC=90°$.

§6 平面向量的应用

6.1 余弦定理与正弦定理

第1课时 余弦定理

【课前预习】

知识点一

其他两边的平方和减去这两边与它们夹角余弦的积的两倍

$c^2+a^2-2ca\cos B$ $a^2+b^2-2ab\cos C$

诊断分析

(1)√ (2)√ (3)× (4)√ (5)√

知识点二

$\frac{1}{2}ac\sin B$ $\frac{1}{2}ab\sin C$

诊断分析

(1)× (2)√ **【解析】** (1)由三角形面积公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$,得$\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin A=\sqrt{3}$,所以$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为$0°<A<180°$,所以$A=60°$或$A=120°$.

(2)该三角形的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\sin 30°=6$.

【课中探究】

探究点一

例1 (1)2 $\frac{\sqrt{15}}{8}$ (2)A **【解析】** (1)根据余弦定理,得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1^2+2^2-2\times 1\times 2\times\frac{1}{4}=4$,所以$c=2$. 由$a=1$,$b=2$,$c=2$,得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7}{8}$,所以$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$.

(2)由余弦定理得$AC^2+AB^2-BC^2=2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$,代入数据,得到$AC^2+3AC-40=0$,解得$AC=5$或$AC=-8$(舍去). 故选A.

变式 A **【解析】** 由$(a+b)^2-c^2=4$,得$a^2+b^2-c^2+2ab=4$,由余弦定理得$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C=2ab\cos 60°=ab$,则$ab+2ab=4$,$\therefore ab=\frac{4}{3}$. 故选A.

探究点二

例2 (1)C **【解析】** 设$a=k(k>0)$,则$b=2k$,$c=\sqrt{7}k$,$\because c>b>a$,$\therefore\angle C$最大,$\because\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{k^2+4k^2-7k^2}{4k^2}=-\frac{1}{2}$,且$C\in(0,\pi)$,$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$. 故选C.

(2)**解:** 由余弦定理的推论得$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\times 2\times 3}=\frac{1}{2}$,因为$B\in(0,\pi)$,所以$B=\frac{\pi}{3}$.

变式 (1)A (2)C **【解析】** (1)设三角形的三边边长分别为m,$\sqrt{3}m$,$2m$,$m>0$,最大角为A,则$\cos A=\frac{m^2+(\sqrt{3}m)^2-(2m)^2}{2m\cdot\sqrt{3}m}=0$,$\because A\in(0°,180°)$,$\therefore A=90°$. 设最小角为$B$,则$\cos B=\frac{(2m)^2+(\sqrt{3}m)^2-m^2}{2\times 2m\cdot\sqrt{3}m}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\because B\in(0°,180°)$,$\therefore B=30°$. 从而$C=60°$,$\therefore B:C:A=1:2:3$. 故选A.

(2)由题知$2<m<4$. 设锐角三角形的内角A,B,C对应的边的边长分别为1,3,m,当$4>m\geqslant 3$时,$\cos C=\frac{1+9-m^2}{2\times 1\times 3}>0$,

所以 $3\leqslant m<\sqrt{10}$；当 $2<m<3$ 时，$\cos B=\dfrac{1+m^2-9}{2\times1\times m}>0$，所以 $2\sqrt{2}<m<3$. 所以 m 的取值范围是 $(2\sqrt{2},\sqrt{10})$.

探究点三

例 3 (1)C (2)C 【解析】(1)由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{9+b^2-7}{6b}$，解得 $b=1$ 或 $b=2$. 当 $b=1$ 时，$b^2+c^2-a^2<0$，此时 A 为钝角，不合题意；当 $b=2$ 时，$b^2+c^2-a^2>0$，最大的角 A 为锐角，符合题意，此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

(2)∵ $a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ac\cos B$，∴ $a^2+b^2+c^2=2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，∴ $a^2+b^2+c^2=b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2=2c^2$，即 $a^2+b^2=c^2$，∴ $\triangle ABC$ 一定是直角三角形.

变式 (1)C (2)A 【解析】(1)由余弦定理的推论知 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，代入已知条件得 $a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\cdot\dfrac{c^2-a^2-b^2}{2ab}=0$，即 $a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(c^2-a^2-b^2)=0$，展开整理得 $(a^2-b^2)^2=c^4$，∴ $a^2-b^2=\pm c^2$，即 $a^2=b^2+c^2$ 或 $b^2=a^2+c^2$. 根据勾股定理知 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

(2)因为 $(a+b+c)(a-b+c)=4\sqrt{2}$，所以 $a^2+c^2-b^2=4\sqrt{2}-2ac$. 又 $B=\dfrac{\pi}{4}$，所以由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{2\sqrt{2}-ac}{ac}$，解得 $ac=4\sqrt{2}-4$，故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times(4\sqrt{2}-4)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$，故选 A.

第 2 课时 正弦定理

【课前预习】

知识点

1. 正弦

诊断分析

(1)√ (2)√ (3)√ 【解析】(1)正弦定理适用于任意三角形.

(2)由正弦定理知 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即 $b\sin A=a\sin B$.

(3)根据正弦定理知，在一个确定的三角形中，各边与它所对角的正弦的比值为该三角形的外接圆直径，是一个定值.

【课中探究】

探究点一

探索 解：确定. 已知两角，则三角形的三个角就都知道了，再知道一边，三角形就确定了.

例 1 (1)D (2)A 【解析】(1)由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，则

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{1\times\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}.$$

(2)由题可知 $B=180^\circ-45^\circ-75^\circ=60^\circ$，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin 60^\circ}=\dfrac{BC}{\sin 45^\circ}$，则 $AC=\dfrac{BC\cdot\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$. 故选 A.

变式 A 【解析】由三角形内角和定理，得 $A=180^\circ-(B+C)=75^\circ$，所以 B 是最小角，b 为最短边. 由正弦定理，得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，即 $\dfrac{b}{\sin 45^\circ}=\dfrac{1}{\sin 60^\circ}$，则 $b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故选 A.

探究点二

例 2 解：因为 $a=3$，$b=\sqrt{3}$，$A=60^\circ$，所以由正弦定理可得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即 $\sin B=\dfrac{b}{a}\cdot\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $b<a$，所以 $B<A$，

所以 $B=30^\circ$，所以 $C=90^\circ$，$c=2\sqrt{3}$.

变式 解：在 $\triangle ABC$ 中，$a=2\sqrt{3}$，$b=6$，$A=30^\circ$，∴ $b\sin A=6\times\dfrac{1}{2}=3$，∵ $3<2\sqrt{3}<6$，∴该三角形有两解.

由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $B=60^\circ$ 或 $B=120^\circ$.

当 $B=60^\circ$ 时，$C=90^\circ$，$c=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}$；

当 $B=120^\circ$ 时，$C=30^\circ$，$c=a=2\sqrt{3}$.

拓展 解：(1)由题意得 $\sin B=\dfrac{b}{a}\sin 120^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$，$A>B$，$A=120^\circ$，所以该三角形只有一解.

(2)$\sin B=\dfrac{b}{a}\sin 60^\circ=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}<1$，由题意可知 $B>A$，$A=60^\circ$，所以 B 可能是锐角，也可能是钝角.

当 B 为锐角时，满足 $\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ 的角 B 的取值范围是 $60^\circ<B<90^\circ$，满足 $A+B<180^\circ$；当 B 为钝角时，满足 $\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ 的角 B 的取值范围是 $90^\circ<B<120^\circ$，也满足 $A+B<180^\circ$. 故该三角形有两解.

(3)$\sin B=\dfrac{b}{c}\sin C=\dfrac{72}{50}\sin C=\dfrac{36\sqrt{2}}{50}>1$，故该三角形无解.

探究点三

例 3 解：根据正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，∵ $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$，∴ $a^2=b^2+c^2$，∴ A 是直角，$B+C=90^\circ$，

∴ $2\sin B\cos C=2\sin B\cos(90^\circ-B)=2\sin^2B=\sin A=1$.

∵ $0^\circ<B<90^\circ$，∴ $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $B=45^\circ$，$C=45^\circ$，∴ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

变式 (1)C (2)B 【解析】(1)因为 $3b=2\sqrt{3}a\sin B$，所以由正弦定理可得 $3\sin B=2\sqrt{3}\sin A\sin B$. 因为 $0^\circ<B<180^\circ$，所以 $\sin B\neq0$，所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又 $0^\circ<A<180^\circ$，所以 $A=60^\circ$ 或 120°. 因为 $\cos A=\cos C$，所以 $A=C=60^\circ$，故 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 故选 C.

(2)因为 $\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{\sin C}{\sin A+\sin B}$，所以由正弦定理得 $\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{c}{a+b}$，整理得 $b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. 故选 B.

第 3 课时 用余弦定理、正弦定理解三角形

【课中探究】

探究点一

例 1 解：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{AB^2+CB^2-AC^2}{2AB\cdot CB}=\dfrac{64+25-49}{2\times8\times5}=\dfrac{1}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times AB\times CB\times\sin B=10\sqrt{3}$.

(2)在 $\triangle BCD$ 中，$BC=CD=5$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\triangle CDB$ 为等边三角形，所以 $BD=5$，$AD=3$. 在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ACD=\dfrac{AC^2+DC^2-AD^2}{2\cdot AC\cdot DC}=\dfrac{13}{14}$，又 $\angle ACD\in(0,\pi)$，所以 $\sin\angle ACD=\sqrt{1-\cos^2\angle ACD}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

变式 B 【解析】方法一：因为 $\triangle ABD$ 是边长为 3 的等边三角形，所以 $AB=AD=BD=3$，$A=60^\circ$. 因为 $\triangle BCD$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$\angle BDC=120^\circ$，所以 $\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times CD=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，解得

$CD=1$，所以 $AC=4$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 60°=13$，所以 $BC=\sqrt{13}$，$\triangle BCD$ 的周长为 $4+\sqrt{13}$. 故选 B.

方法二：因为 $\triangle ABD$ 是边长为 3 的等边三角形，所以 $BD=3$，$\angle BDC=120°$，因为 $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以 $\frac{1}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times CD=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，解得 $CD=1$. 在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BC^2=CD^2+BD^2-2CD\cdot BD\cos 120°=1+9-2\times 1\times 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13$，所以 $BC=\sqrt{13}$，所以 $\triangle BCD$ 的周长为 $4+\sqrt{13}$. 故选 B.

探究点二

例 2 **解**：(1)因为向量 $\boldsymbol{m}=(a,\sqrt{3}b)$，$\boldsymbol{n}=(\sin B,-\cos A)$，且 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$，

由正弦定理得 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$，

由 $0<B<\pi$，得 $\sin B\neq 0$，则 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，即 $\tan A=\sqrt{3}$，

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $A=\frac{\pi}{3}$，则有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=9$，变形可得 $(b+c)^2-3bc=9$，由 $bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，得 $\frac{(b+c)^2}{4}\leqslant 9$，即 $b+c\leqslant 6$，所以 $a+b+c\leqslant 9$，故 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 9.

变式 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **【解析】** 因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$，结合正弦定理得 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$，易知 $\sin B\neq 0$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

第 4 课时 余弦定理、正弦定理的应用举例

【课前预习】

知识点三

目标方向线 顺

诊断分析

(1)× (2)× (3)√ (4)× **【解析】**(1)两个不可到达的点之间的距离往往可以借助第三个和第四个点来量出相应的角度和距离求得.

(2)方位角是指从正北方向线按顺时针方向旋转到目标方向线的水平角；而方向角是以观测者的位置为中心，将正北或正南或正东或正西方向线作为起始方向线旋转到目标方向线所成的小于 90°的角.

(3)由坡角的定义可知正确.

(4)坡度是指坡面的铅直高度与坡面的水平距离之比.

【课中探究】

探究点一

探索 **解**：选取另外一个目标，并测出该目标与可到达的目标之间的距离，再分别测量这两点与不可到达目标的连线与这两点连线的夹角.

例 1 **解**：在 $\triangle ABC$ 中，$AC=150$ m，$A=75°$，$C=45°$，则 $B=180°-(A+C)=60°$，由正弦定理得 $AB=\frac{AC\sin C}{\sin B}=\frac{150\sin 45°}{\sin 60°}=50\sqrt{6}$(m)，即 A,B 两点间的距离为 $50\sqrt{6}$ m.

变式 C **【解析】** 由题意得 $B=180°-A-C=37°$，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$，则 $\frac{60\sqrt{3}}{\sin 37°}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，所以 $AB=\frac{90}{\sin 37°}\approx 150$(米).

探究点二

例 2 **解**：$\because\angle ADC=\angle ADB+\angle CDB=60°$，

且 $\angle DCA=60°$，$\therefore\angle DAC=60°$，

$\therefore AD=CD=AC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 在 $\triangle BCD$ 中，$\angle DBC=45°$，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin 30°}=\frac{CD}{\sin 45°}$，$\therefore BC=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 45°=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{8}a^2-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{4}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{8}a^2$，

$\therefore AB=\frac{\sqrt{6}}{4}a$. $\therefore$ 蓝方这两支精锐部队之间的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

变式 **解**：(1)由题意知，$\angle BDC=\angle DCA=15°$，$\angle ACB=120°$，所以 $\angle DCB=135°$，$\angle DBC=30°$.

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle DBC}=\frac{BD}{\sin\angle DCB}$，所以 $BD=\frac{CD\sin\angle DCB}{\sin\angle DBC}=\frac{40\sin 135°}{\sin 30°}=40\sqrt{2}$(米)，即 B,D 两点间的距离为 $40\sqrt{2}$ 米.

(2)因为 $\angle ADB=135°$，$\angle BDC=\angle DCA=15°$，

所以 $\angle ADC=150°$，$\angle DAC=15°$，所以 $AD=DC=40$(米)，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=40^2+(40\sqrt{2})^2-2\times 40\times 40\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8000$，所以 $AB=40\sqrt{5}$ 米，即 A,B 两点间的距离为 $40\sqrt{5}$ 米.

探究点三

探索 **解**：选取地面上与物体底部在同一条直线上的两点，测量选取的两点间的距离，再分别测量在这两点处观测物体顶点的仰角.

例 3 **解**：设 $AB=h$ 米，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=45°$，则 $BC=h$ 米. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\angle ADB=30°$，则 $BD=\sqrt{3}h$ 米.

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理可得 $CD^2=BC^2+BD^2-2\cdot BC\cdot BD\cdot\cos\angle CBD$，即 $200^2=h^2+(\sqrt{3}h)^2-2\cdot h\cdot\sqrt{3}h\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $h=200$ 或 $h=-200$(舍去)，故塔高为 200 米.

变式 (1)D (2)C **【解析】**(1)设 $AB=h$ 米，则由题意知 $CB=h$ 米，$DB=AB\cdot\frac{\sin 60°}{\sin 30°}=\sqrt{3}h$(米)，$\therefore\sqrt{3}h-h=100$，可得 $h=50(\sqrt{3}+1)$. 故选 D.

(2)设 $AC=x$ m，则 $CD=\sqrt{3}x$ m，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=75°-15°=60°$，$\angle ABC=90°+15°=105°$，$AB=300$ m，由正弦定理，得 $\frac{x}{\sin 105°}=\frac{300}{\sin 60°}$，又 $\sin 105°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，所以 $x=50(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$，所以 $CD=\sqrt{3}x=150(\sqrt{6}+\sqrt{2})$(m). 故选 C.

探究点四

例 4 **解**：设护航舰最快与货船相遇所需的时间为 t 小时，则 $AB=10\sqrt{3}t$ 海里，$CB=10t$ 海里，在 $\triangle ABC$ 中，根据余弦定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos 120°$，

可得 $(10\sqrt{3}t)^2=10^2+(10t)^2-2\times 10\times 10t\cos 120°$，

整理得 $2t^2-t-1=0$，解得 $t=1$ 或 $t=-\frac{1}{2}$(舍去).

所以护航舰最快与货船相遇所需的时间为 1 小时.

此时 $AB=10\sqrt{3}$ 海里，$BC=10$ 海里，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AB}{\sin 120°}$，

所以 $\sin\angle CAB=\frac{BC\sin 120°}{AB}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，

所以 $\angle CAB=30°$，所以护航舰的航向为北偏东 75°.

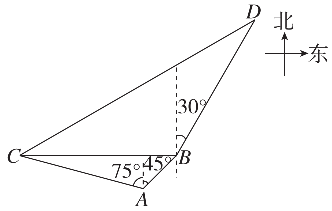
变式 **解**：设缉私船 t h 后在 D 处追上走私船，如图所示，

则 $CD=10\sqrt{3}t$ n mile，$BD=10t$ n mile.

连接 BC，在 $\triangle ABC$ 中，

$\because AB=(\sqrt{3}-1)$ n mile，$AC=2$ n mile，$\angle BAC=120°$，$\therefore$ 由余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2\times(\sqrt{3}-1)\times 2\times\cos 120°=6$，$\therefore BC=\sqrt{6}$ n mile，$\therefore\sin\angle ABC=\frac{AC}{BC}\times\sin\angle BAC=\frac{2}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由图易知 $\angle ABC=45°$，$\therefore BC$ 与正北方向线成 90°角.

$\therefore \angle CBD=90^\circ+30^\circ=120^\circ$，在$\triangle BCD$中，由正弦定理，得$\sin\angle BCD=\dfrac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\dfrac{10t\sin 120^\circ}{10\sqrt{3}t}=\dfrac{1}{2}$，由图易知$\angle BCD=30^\circ$，即缉私船沿北偏东$60^\circ$方向能最快追上走私船.



6.2 平面向量在几何、物理中的应用举例

【课前预习】

知识点一

1. 向量的线性运算及数量积

诊断分析

(1)× (2)× 【解析】(1)哪个角是直角不确定，所以错误.(2)AB和CD还可能在同一条直线上.

知识点二

1. 既有大小又有方向　三角形和平行四边形

诊断分析

(1)√ (2)√

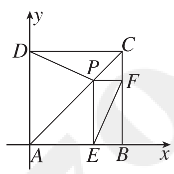
【课中探究】

探究点一

探索 **解**：所选择基中向量的长度和夹角应该是已知的.

例1 **证明**：方法一：设正方形$ABCD$的边长为1，$AE=a(0<a<1)$，则$EP=AE=a$，$PF=EB=1-a$，$AP=\sqrt{2}a$，$\therefore \overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PF})=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PF}=1\times a\times\cos 180^\circ+1\times(1-a)\times\cos 90^\circ+\sqrt{2}a\times a\times\cos 45^\circ+\sqrt{2}a\times(1-a)\times\cos 45^\circ=-a+a^2+a(1-a)=0$，$\therefore \overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{EF}$，即$DP\perp EF$.

方法二：设正方形$ABCD$的边长为1，建立如图所示的平面直角坐标系，设$P(x,x)(0<x<1)$，则$D(0,1)$，$E(x,0)$，$F(1,x)$，$\therefore \overrightarrow{DP}=(x,x-1)$，$\overrightarrow{EF}=(1-x,x)$，则$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{EF}=x(1-x)+x(x-1)=0$，$\therefore \overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{EF}$，即$DP\perp EF$.



变式 **证明**：方法一：取$\{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\}$为基.

$\because D$是CB的中点，$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

$\because E$是AB上的一点，且$AE=2EB$，$\therefore \overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

$\because \triangle ABC$是直角三角形，$CA=CB$，$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(-\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}^2-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}^2=0$，$\therefore AD\perp CE$.

方法二：以C为原点，$\overrightarrow{CA}$的方向为x轴正方向，$\overrightarrow{CB}$的方向为y轴正方向，建立平面直角坐标系.

设$AC=a$，则$A(a,0)$，$D\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$，$C(0,0)$，$E\left(\dfrac{1}{3}a,\dfrac{2}{3}a\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\left(-a,\dfrac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1}{3}a,\dfrac{2}{3}a\right)$，

则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=-a\cdot\dfrac{1}{3}a+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{2}{3}a=0$，$\therefore AD\perp CE$.

拓展 **解**：设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为表示平面向量的一组基，且$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，可知$\angle PED$为向量$\overrightarrow{EP}$与$\overrightarrow{ED}$的夹角.

由点P在AO上，可设$\overrightarrow{OP}=t\boldsymbol{a}$，$t\in[0,1]$，则$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OE}=t\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

所以$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(t\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=t\boldsymbol{a}^2-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}^2=9t-1$，$|\overrightarrow{EP}|=\sqrt{\left(t\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)^2}=\sqrt{9t^2+1}$，$|\overrightarrow{ED}|=\sqrt{\left(\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)^2}=\sqrt{10}$，

所以$\cos\angle PED=\dfrac{\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\overrightarrow{EP}|\cdot|\overrightarrow{ED}|}=\dfrac{9t-1}{\sqrt{9t^2+1}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

解得$t=\dfrac{2}{3}$或$t=-\dfrac{1}{6}$(舍去)，

所以当点P为AO上靠近A的三等分点时，$\angle PED=45^\circ$.

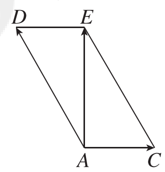
探究点二

例2 **解**：(1)由题意得$\boldsymbol{F}_1=(-3,5)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-3)$，$\overrightarrow{AB}=(-6,5)$，$\therefore$力$\boldsymbol{F}_1$对质点所做的功$W_1=\boldsymbol{F}_1\cdot\overrightarrow{AB}=(-3,5)\cdot(-6,5)=18+25=43(\mathrm{J})$.

力$\boldsymbol{F}_2$对质点所做的功$W_2=\boldsymbol{F}_2\cdot\overrightarrow{AB}=(2,-3)\cdot(-6,5)=-12-15=-27(\mathrm{J})$.

(2)由题意得$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=(-1,2)$，由(1)知$\overrightarrow{AB}=(-6,5)$，$\therefore$力$\boldsymbol{F}$对质点所做的功$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=6+10=16(\mathrm{J})$.

变式 **解**：如图所示，设$\overrightarrow{AC}$为水流的速度，$\overrightarrow{AD}$为船在静水中的最大速度，以AC和AD为邻边作▱$ACED$，则当AE与AC垂直时能最快到达彼岸.



$\because AC\perp AE$，$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle ADE$和▱$ACED$中，$|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{AC}|=2\ \mathrm{km/h}$，$|\overrightarrow{AD}|=4\ \mathrm{km/h}$，$\angle AED=90^\circ$，$\therefore |\overrightarrow{AE}|=\sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{DE}|^2}=2\sqrt{3}(\mathrm{km/h})$，

易知$\sin\angle EAD=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \angle EAD=30^\circ$.

又$AB=\sqrt{3}\ \mathrm{km}$，$\therefore$最快到达河正对岸所需时间为0.5 h.

答：该船以大小为4 km/h，方向与水流方向成120°角的速度航行能最快到达河正对岸的B码头，用时0.5 h.

本章总结提升

【知识辨析】

1. ×　2. √　3. √　4. ×　5. √　6. √　7. ×　8. √　9. ×　10. ×　11. ×

【素养提升】

题型一

例1 (1)B 【解析】由$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$，得$\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{MC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{5}\boldsymbol{b}$.

(2)**解**：①因为$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，

所以$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k-1,2k+1)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3,0)$，因为$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$平行，所以$3(2k+1)=0$，解得$k=-\dfrac{1}{2}$.

②证明：因为$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，

所以$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，即$\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$共线，

所以A，B，D三点共线.

例2 (1)B (2)C 【解析】(1)由$\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$得$(-3,-4)=\lambda_1(1,2)+\lambda_2(2,3)=(\lambda_1+2\lambda_2,2\lambda_1+3\lambda_2)$，所以$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=-3,\\2\lambda_1+3\lambda_2=-4,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda_1=1,\\\lambda_2=-2.\end{cases}$

(2)由$A(1,-3)$，$B\left(8,\dfrac{1}{2}\right)$，$C(9,\lambda)$，可得$\overrightarrow{AB}=\left(7,\dfrac{7}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(8,\lambda+3)$.由$A$，$B$，$C$三点共线，得$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，则$7(\lambda+3)-8\times\dfrac{7}{2}=0$，解得$\lambda=1$.故选C.

变式 (1)D (2)(2,4) 【解析】(1)连接CD，由点C，D是半圆弧的三等分点，得$CD/\!/AB$且$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

(2)∵在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$DC=2AB$，∴$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$. 设点 D 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{DC}=(4,2)-(x,y)=(4-x,2-y)$，又 $\overrightarrow{AB}=(2,1)-(1,2)=(1,-1)$，∴$(4-x,2-y)=2(1,-1)$，即 $(4-x,2-y)=(2,-2)$，∴$\begin{cases}4-x=2,\\2-y=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$ 故点 D 的坐标为 $(2,4)$.

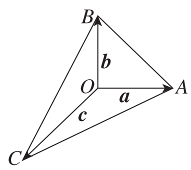
题型二

例3 (1)C (2)D (3)C **[解析]** (1)在等边三角形 ABC 中，点 D 是边 BC 的中点，且 $AD=2\sqrt{3}$，则 $\angle DAB=30°$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$，$AB=4$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot 2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}^2=2\times4\times2\sqrt{3}\cos 30°-2\times4^2=-8$. 故选 C.

(2)因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})=0$，即 $4+x(x-4)=0$，解得 $x=2$. 故选 D.

(3)∵$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$，∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 30°=\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$. 由题意得 $(\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}^2+(\lambda-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=3\lambda+3(\lambda-1)-4=6\lambda-7<0$，∴$\lambda<\frac{7}{6}$. 又当 $\lambda=-1$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向相反，此时向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $180°$，不符合题意，∴$\lambda\neq-1$. ∴$\lambda<\frac{7}{6}$ 且 $\lambda\neq-1$. 故选 C.

变式 (1)D (2)B (3)$-\frac{1}{4}$



[解析] (1)因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，平方得 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^2$，即 $1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 如图，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CB}$，$\angle BOC=\angle AOC=\frac{3\pi}{4}$，$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，由余弦定理得 $|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$，所以在 $\triangle ACB$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ACB=\frac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$，即 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\frac{4}{5}$. 故选 D.

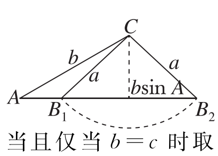
(2)由题意得 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{e}=\frac{3}{2}\boldsymbol{e}$，即 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}|\boldsymbol{b}|=\frac{9}{2}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，因为 $0°\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant180°$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$. 故选 B.

(3)以 A 为原点，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴的正方向建立平面直角坐标系(图略)，则根据题意得 $F(0,1)$，$D\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$E(2,0)$，所以 $\overrightarrow{DE}=\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{DF}=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=-1+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$.

题型三

例4 (1)B (2)ACD **[解析]** (1)因为 $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，所以由正弦定理得 $(a+c)(a-c)=b(a-b)$，即 $a^2-c^2=ab-b^2$，则 $a^2+b^2-c^2=ab$，故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

(2)对于 A，$b\sin A=4\sin 30°=2$，则 $b\sin A<a<b$，所以 $\triangle ABC$ 有两解(如图，点 B 位于点 B_1 或 B_2 位置)，故 A 正确；



对于 B，因为 $A=60°$，$a=2$，所以由余弦定理得 $a^2=4=b^2+c^2-bc\geqslant bc$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，所以 $bc\leqslant4$，可得 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$，即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$，故 B 错误；对于 C，若 $a=4$，$b=5$，$c=6$，则由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+36-16}{2\times5\times6}=\frac{3}{4}$，则 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，则 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{16\sqrt{7}}{7}$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径），得 $R=\frac{8\sqrt{7}}{7}$，故 C 正确；对于 D，因为 $ab>c^2$，所以 $-c^2>-ab$，又因为 $a^2+b^2\geqslant2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取等号），所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\frac{2ab-ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，则 $0<C<\frac{\pi}{3}$，故 D 正确. 故选 ACD.

例5 **解**：(1)由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$，所以 $\sqrt{2}\cos B=\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\cos B=\frac{1}{2}$. 因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)可得 $A=\pi-B-C=\frac{5}{12}\pi$，设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R，由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，所以 $b=\sqrt{3}R$，$c=\sqrt{2}R$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}R\cdot\sqrt{2}R\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=3+\sqrt{3}$，可得 $R=2$，所以 $c=2\sqrt{2}$.

变式 **解**：(1)由 $\cos C=\frac{3}{5}$，$0<C<\pi$，得 $\sin C=\frac{4}{5}$.

因为 $4a=\sqrt{5}c$，所以由正弦定理知 $4\sin A=\sqrt{5}\sin C$，

则 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{4}\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)因为 $4a=\sqrt{5}c$，所以由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+121-\frac{16}{5}a^2}{22a}=\frac{11-\frac{a^2}{5}}{2a}=\frac{3}{5}$，

即 $a^2+6a-55=0$，可得 $a=5$，因为 $\sin C=\frac{4}{5}$，$b=11$，

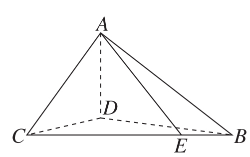
所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times5\times11\times\frac{4}{5}=22$.

例6 **解**：(1)因为 $\frac{a-c}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$，所以由正弦定理得 $\frac{a-c}{a+b}=\frac{a-b}{c}$，化简可得 $a^2+c^2-b^2=ac$，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $\triangle ABC$ 外接圆的周长为 $4\sqrt{3}\pi$，所以外接圆的直径为 $4\sqrt{3}$，因为 $B=\frac{\pi}{3}$，所以由正弦定理可得 $b=4\sqrt{3}\sin B=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$. 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，可得 $36=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac\geqslant(a+c)^2-3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$，当且仅当 $a=c=6$ 时，等号成立，所以 $a+c\leqslant12$，又因为 $a+c>b=6$，所以 $6<a+c\leqslant12$，所以 $12<a+b+c\leqslant18$，则 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $(12,18]$.

题型四

例7 **解**：(1)如图所示，



根据题意得 $AD=100$ m，$\angle DBA=30°$，$\angle ACD=45°$，易知 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 都是直角三角形，

所以 $AC=\sqrt{2}AD=100\sqrt{2}$(m)，$AB=200$ m，$BD=100\sqrt{3}$ m.

因为 $\angle BAC=90°$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，

所以 $BC=\sqrt{(100\sqrt{2})^2+200^2}=100\sqrt{6}$(m).

所以这辆汽车的速度为$\frac{100\sqrt{6}}{20}=5\sqrt{6}$(m/s).

(2)汽车从 B 往 C 方向行驶 5 s 时到达 E 处,故 $BE=25\sqrt{6}$ m.在 Rt△ABC 中,$\cos\angle ABC=\frac{200}{100\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,在△$ABE$ 中,由余弦定理得 $AE^2=AB^2+BE^2-2\cdot AB\cdot BE\cdot\cos\angle ABC=200^2+(25\sqrt{6})^2-2\times200\times25\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=23\ 750$,所以 $AE=25\sqrt{38}$ m,故此时山顶 A 与汽车之间的距离 AE 为 $25\sqrt{38}$ m.

例 8 C **【解析】** 设 $OT=h$ 米,在 Rt△AOT 中,$\angle TAO=30°$,$AO=\frac{h}{\tan 30°}=\sqrt{3}h$.在 Rt△$BOT$ 中,$\angle TBO=60°$,$BO=\frac{h}{\tan 60°}=\frac{\sqrt{3}}{3}h$.在△$AOB$ 中,$\angle AOB=81.7°-21.7°=60°$,由余弦定理得 $AB^2=AO^2+BO^2-2\cdot AO\cdot BO\cdot\cos 60°$,即 $140^2=3h^2+\frac{1}{3}h^2-2\times\sqrt{3}h\times\frac{\sqrt{3}}{3}h\times\frac{1}{2}$,化简得 $h^2=\frac{3}{7}\times140^2$,又 $h>0$,所以 $h=140\times\sqrt{\frac{3}{7}}=20\sqrt{21}$,即山高 OT 为 $20\sqrt{21}$米.故选 C.

变式 (1)A (2)$20\sqrt{6}$ **【解析】**(1)设 $OP=h$ 米,则 $OA=h$ 米,$OB=\sqrt{3}h$ 米.在△OAB 中,由余弦定理可得 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB$,即$(15\sqrt{7})^2=h^2+3h^2-2\times\sqrt{3}h^2\cos 150°=7h^2$,解得 $h=15$.故选 A.

(2)连接 AB,由题意知 $CD=40$,$\angle ADC=90°+15°=105°$,$\angle BDC=45°$,$\angle BCD=90°$,$\angle ACD=90°-60°=30°$,$\angle CAD=45°$,$\angle ADB=60°$.在△ACD 中,由正弦定理得$\frac{AD}{\sin 30°}=\frac{40}{\sin 45°}$,∴$AD=20\sqrt{2}$.在 Rt△$BCD$ 中,∵$\angle BDC=45°$,$\angle BCD=90°$,∴$BD=\sqrt{2}CD=40\sqrt{2}$.在△ABD 中,由余弦定理得 $AB=\sqrt{800+3200-2\times20\sqrt{2}\times40\sqrt{2}\times\cos 60°}=20\sqrt{6}$.

题型五

例 9 (1)D (2)C **【解析】**(1)∵$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$,∴$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$,∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.∵$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,∴$\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC}$,∴平行四边形 $ABCD$ 一定是菱形.

(2)设船的实际速度为 $\boldsymbol{v}$,则 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$,记 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 θ,要使船行驶的航程最短,则 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{v}_2$,所以 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1|}=\frac{1}{2}$,得 $\theta=30°$,所以 $\boldsymbol{v}_1$ 与$-\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 $90°-30°=60°$.故选 C.

变式 (1)A (2)B **【解析】**(1)根据题意,在△ABC 中,由正弦定理可得$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\sin C}=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{\sin B}$,设$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\sin C}=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{\sin B}=\frac{1}{\lambda}$,则 $\overrightarrow{AP}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,则点 P 在△ABC 的边 BC 上的中线所在直线上,故动点 P 的轨迹一定经过△ABC 的重心,故选 A.

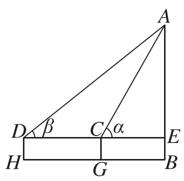
(2)由题意知,8 根绳子拉力的合力大小与礼物的重力大小相等,设每根绳子拉力的大小为$|\boldsymbol{T}|$ N,则 $8|\boldsymbol{T}|\cos 60°=1\times9.8$,解得$|\boldsymbol{T}|=2.45$.故选 B.

第三章 数学建模活动(二)

§1 数学建模活动的准备

§2 自主数学建模的开题交流

例 **解:**(1)选用测角仪与米尺即可,如图所示.



①选择一条水平基线 HG,使 H,G,B 三点在同一条直线上;

②在 C,D 两点用测角仪测得 A 的仰角分别为 α,β,$CD=a$,测得测角仪的高度是 h;

③经计算得建筑物 $AB=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}+h\left(\text{或 } AB=\frac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}+h\right)$.

(2)①测量工具问题;

②两次测量时位置的间距差测量有误差;

③测角仪的高度有误差;

④测量的角度有误差.

(注:其他的合理测量方法与合理理由相应给分).

第四章 三角恒等变换

§1 同角三角函数的基本关系

1.1 基本关系式

1.2 由一个三角函数值求其他三角函数值

1.3 综合应用

【课前预习】

知识点

1. 1
2. $\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$
3. (1)$1-\cos^2\alpha$ $1-\sin^2\alpha$ (2)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\pm2\sin\alpha\cos\alpha$ $1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$ (3)$\cos\alpha\tan\alpha$ $\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

诊断分析

(1)× (2)× (3)× **【解析】**(1)在同角三角函数的基本关系式中要注意是"同角"才成立,即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(2)只有式子有意义时才成立.当 $\alpha=\pi$ 时,$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$不成立.

(3)若 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$,则 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【课中探究】

探究点一

例 1 **解:**(1)∵$\cos\alpha=-\frac{3}{5}<0$,∴$\alpha$ 是第二象限角或第三象限角.当 α 是第二象限角时,$\sin\alpha>0$,$\tan\alpha<0$,∴$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$;当 α 是第三象限角时,$\sin\alpha<0$,$\tan\alpha>0$,∴$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$.

(2)∵$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$,∴$\sin\alpha=2\cos\alpha$,又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,∴$4\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,∴$\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$,又 $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,∴$\cos\alpha<0$,∴$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

变式 (1)BC (2)B **【解析】** 因为 $\tan 151°=k$,所以 $k<0$,所以$\frac{\sin^2 151°}{\cos^2 151°}=k^2$(*),即$\frac{\sin^2 151°}{1-\sin^2 151°}=k^2$,因为 $\sin 151°>0$,所以 $\sin 151°=-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$,A 错误,B 正确;(*)式也可以变为

$\dfrac{1-\cos^2 151^\circ}{\cos^2 151^\circ}=k^2$，因为 $\cos 151^\circ<0$，所以 $\cos 151^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，C 正确，D 错误. 故选 BC.

(2) $\because \sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{4}{5}$，则 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$. 故选 B.

探究点二

例 2　解：因为 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}(0<\theta<\pi)$，所以 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{1}{4}$，即 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$，所以 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$. 因为 $0<\theta<\pi$，$\sin\theta\cos\theta<0$，所以 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，所以 $\sin\theta-\cos\theta>0$，

所以 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-4\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

变式　解：$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$，

$\because \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \cos\alpha<\sin\alpha$，故 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{5}{4}$，

$\because \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$，故 $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

探究点三

例 3　解：(1) 原式 $=\dfrac{\dfrac{4\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{3\sin\alpha+5\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\dfrac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{5\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{4\tan\alpha-1}{3\tan\alpha+5}=\dfrac{4\times3-1}{3\times3+5}=\dfrac{11}{14}$.

(2) 原式 $=\dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{4\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{4\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\dfrac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha-1}{4-3\tan^2\alpha}=\dfrac{3^2-2\times3-1}{4-3\times3^2}=-\dfrac{2}{23}$.

(3) 原式 $=\dfrac{\dfrac{3}{4}\sin^2\alpha+\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha}{1}=\dfrac{\dfrac{3}{4}\sin^2\alpha+\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{\frac{3}{4}\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\dfrac{\dfrac{\frac{3}{4}\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\frac{1}{2}\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\dfrac{\frac{3}{4}\tan^2\alpha+\frac{1}{2}}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{\frac{3}{4}\times3^2+\frac{1}{2}}{3^2+1}=\dfrac{29}{40}$.

变式　解：(1) 由 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3$，化简得 $2\cos\alpha=\sin\alpha$，

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$.

(2) $\because \tan\alpha=2$，$\therefore \sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{2^2-2\times2}{2^2+1}=0$.

探究点四

例 4　解：(1) 原式 $=\dfrac{\sqrt{(\cos10^\circ+\sin10^\circ)^2}}{\cos10^\circ+\sin10^\circ}=\dfrac{|\cos10^\circ+\sin10^\circ|}{\cos10^\circ+\sin10^\circ}=1$.

(2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\dfrac{1-\cos\theta-(1+\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=\dfrac{-2\cos\theta}{\sin\theta}=-\dfrac{2}{\tan\theta}$.

(3) 方法一：原式 $=\dfrac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^3-\cos^6\alpha-\sin^6\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=\dfrac{2}{3}$.

方法二：原式 $=\dfrac{1-(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)}{1-(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha)}=\dfrac{1-[(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha]}{1-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)}=\dfrac{1-1+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{1-[(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha]}=\dfrac{2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\dfrac{2}{3}$.

方法三：原式 $=\dfrac{(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)-\sin^4\alpha}{(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-\sin^6\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)}=\dfrac{2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{3}$.

变式　1　**[解析]** $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)+\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$.

例 5　证明：方法一：左边 $=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=$ 右边，所以原式成立.

方法二：右边 $=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=$ 左边，所以原式成立.

变式　证明：由 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，可得 $\tan^2\beta=\dfrac{1}{2}(\tan^2\alpha-1)$，即 $\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1\right)$，所以 $\dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}-1\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{1-\sin^2\alpha}$，得 $\dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha-\frac{1}{2}}{1-\sin^2\alpha}$，即 $\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)=(1-\sin^2\beta)\left(\sin^2\alpha-\dfrac{1}{2}\right)$，整理得 $\dfrac{1}{2}\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\dfrac{1}{2}$，即 $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

§2　两角和与差的三角函数公式

2.1　两角和与差的余弦公式及其应用

【课前预习】

知识点

1. $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　**2.** $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

诊断分析

(1)√　(2)×　(3)√　**[解析]** (2) 当 $\alpha=-45^\circ$，$\beta=45^\circ$ 时，$\cos(\alpha-\beta)=\cos(-45^\circ-45^\circ)=\cos(-90^\circ)=0$，$\cos\alpha-\cos\beta=\cos(-45^\circ)-\cos45^\circ=0$，此时 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$.

(3) 用两角和的余弦公式展开为 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{2}-\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{2}=-\sin\alpha$，用诱导公式化简为 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$.

【课中探究】

探究点一

例 1　(1)C　(2)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(3)$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　**[解析]** (1) $\cos165^\circ=\cos(180^\circ-15^\circ)=-\cos15^\circ=-\cos(45^\circ-30^\circ)=-\cos45^\circ\cos30^\circ-$

$\sin 45°\sin 30°=-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. 故选 C.

(2)原式 $=\cos(x-27°-x-18°)=\cos(-45°)=\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)$\because \cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75°=\cos(30°+45°)=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\therefore \cos 15°+\cos 75°=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

变式 **解**:(1)原式 $=\dfrac{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)原式 $=\cos 43°\cos 77°+\sin 43°\cos(90°+77°)=\cos 43°\cos 77°-\sin 43°\sin 77°=\cos 120°=-\cos 60°=-\dfrac{1}{2}$.

(3)$\because \cos 60°=\dfrac{1}{2}$, $\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \dfrac{1}{2}\cos 15°+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 15°=\cos 60°\cos 15°+\sin 60°\sin 15°=\cos(60°-15°)=\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

探究点二

例 2 (1)A (2)$\dfrac{-4-6\sqrt{2}}{15}$ (3)$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ **【解析】**(1)因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha-\dfrac{\pi}{4}\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$,所以 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$. 由 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$,可得 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4}{5}$,故 $\cos\alpha=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$,故选 A.

(2)因为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$,α 是第四象限角,所以 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. 因为 $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$,β 是第二象限角,所以 $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$. 故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{-4-6\sqrt{2}}{15}$.

(3)因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha-\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,又 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}>0$,所以 $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$,故 $\cos(2\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

变式 $-\dfrac{33}{65}$ **【解析】**$\because \dfrac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$,$\therefore 0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{4}$,$\pi<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$,$\because \cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$,$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{5}{13}$,$\because \sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$,$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\dfrac{4}{5}$,则 $\cos 2\alpha=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}-\dfrac{5}{13}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{33}{65}$.

拓展 $\dfrac{16}{65}$ **【解析】**$\because \alpha,\beta$ 均为锐角,且 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{5}$,$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{5}{13}$,$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{4}{5}$,$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{12}{13}$,$\therefore \cos 2\alpha=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{12}{13}-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{16}{65}$.

探究点三

例 3 (1)$\dfrac{2\pi}{3}$ **【解析】** 因为 $\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$,$\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$,所以 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$. 因为 $0<\alpha<\pi$,所以 $-\dfrac{\pi}{3}<\alpha-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$,所以 $\alpha-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$,故 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)**解**:$\because \alpha-\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{3}{5}$,$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\dfrac{4}{5}$. $\because \alpha+\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$,$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{5}$,$\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{4}{5}$,$\therefore \cos 2\beta=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)+\left(-\dfrac{4}{5}\right)\times\dfrac{4}{5}=-1$. $\because \alpha-\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$\alpha+\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$,$\therefore 2\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$,$\therefore 2\beta=\pi$,故 $\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

变式 **解**:$\because \alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$,$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$,$\therefore \alpha+\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$,$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

$\because \beta=(\alpha+\beta)-\alpha$,$\therefore \cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\left(-\dfrac{11}{14}\right)\times\dfrac{1}{7}+\dfrac{5\sqrt{3}}{14}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=\dfrac{1}{2}$,又 $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\therefore \beta=\dfrac{\pi}{3}$.

2.2 两角和与差的正弦、正切公式及其应用

【课前预习】

知识点一

1. $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ **2.** $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

诊断分析

(1)√ (2)√ (3)× (4)√ **【解析】**(2)当 $\alpha=45°$,$\beta=0°$ 时,$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta$.

(3)当 $\alpha=30°$,$\beta=-30°$ 时,$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 成立.

(4)$\sin(54°-x)\cos(36°+x)+\cos(54°-x)\sin(36°+x)=\sin[(54°-x)+(36°+x)]=\sin 90°=1$.

知识点二

1. $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ **2.** $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

诊断分析

(1)× (2)√ (3)√ **【解析】**(1)还需满足 $\alpha\pm\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

(2)当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$,$\beta=\pi$ 时,$\tan(\alpha+\beta)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$,$\tan\alpha+\tan\beta=\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\pi=1$,故该说法正确.

(3)$\because \dfrac{\tan 12°+\tan 33°}{1-\tan 12°\tan 33°}=\tan(12°+33°)=\tan 45°=1$,

$\therefore \tan 12^\circ+\tan 33^\circ=1-\tan 12^\circ\tan 33^\circ$，$\therefore \tan 12^\circ+\tan 33^\circ+\tan 12^\circ\tan 33^\circ=1$.

【课中探究】

探究点一

例1 (1)A (2)D (3)-1 【解析】(1)$\because \cos 151^\circ=-\cos 29^\circ$，$\therefore$原式$=-\sin 16^\circ\cos 29^\circ-\cos 16^\circ\sin 29^\circ=-\sin(16^\circ+29^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选A.

(2)$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$.故选D.

(3)原式$=\frac{1-\tan 60^\circ\tan 75^\circ}{\tan 60^\circ+\tan 75^\circ}=\frac{1}{\tan(60^\circ+75^\circ)}=\frac{1}{\tan 135^\circ}=-1$.

变式 **解**：(1)原式$=\frac{\sin(15^\circ-8^\circ)+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos(15^\circ-8^\circ)-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}=\frac{\sin 15^\circ\cos 8^\circ-\cos 15^\circ\sin 8^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 15^\circ\cos 8^\circ+\sin 15^\circ\sin 8^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}=\frac{\sin 15^\circ\cos 8^\circ}{\cos 15^\circ\cos 8^\circ}=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sin(45^\circ-30^\circ)}{\cos(45^\circ-30^\circ)}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=2-\sqrt{3}$.

(2)原式$=\frac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ+15^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

(3)$\because \tan 23^\circ+\tan 37^\circ=\tan 60^\circ(1-\tan 23^\circ\tan 37^\circ)$，$\therefore$原式$=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ+\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ=\sqrt{3}$.

探究点二

例2 (1)A (2)D (3)$-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ 【解析】(1)$\because 0<B<\pi$，$\cos B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\therefore \sin B=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.又$A=\frac{\pi}{4}$，$\therefore \sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.故选A.

(2)$\because \tan\alpha=\frac{3}{4}$，$\therefore \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7$.故选D.

(3)由已知得$\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos\beta=-\frac{4}{5}$，$\because 450^\circ<\beta<540^\circ$，$\therefore \beta$为第二象限角，$\therefore \sin\beta=\frac{3}{5}$，$\therefore \sin(60^\circ-\beta)=\sin 60^\circ\cos\beta-\cos 60^\circ\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$.

变式 (1)B 【解析】因为$\tan\alpha=-3$，所以$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-3+1}{1-(-3)\times 1}=-\frac{1}{2}$，所以$\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[\alpha+\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\tan\alpha+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\alpha\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=7$.故选B.

(2)**解**：(i)因为$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\pi$，

所以$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{4}{5}$.

因为$0<\beta<\frac{\pi}{4}$，所以$\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\beta<\pi$，

所以$\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)}=-\frac{12}{13}$，

故$\sin(\alpha+\beta)=-\sin(\pi+\alpha+\beta)=-\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]=-\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]=-\left[\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}\right]=\frac{63}{65}$.

(ii)由(i)可得$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=-\frac{4}{3}$，所以

$\tan\alpha=\tan\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{4}{3}-1}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\times 1}=7$.

探究点三

例3 (1)$\frac{\pi}{4}$ 【解析】因为$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，所以$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$.因为$\alpha,\beta$均为锐角，所以$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

(2)**解**：因为α,β均为锐角，且$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.又$\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}$.

变式 **解**：因为$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

又$\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

由$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$得$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又因为$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\beta=\frac{\pi}{4}$.

2.3 三角函数的叠加及其应用

【课前预习】

知识点

诊断分析

1. (1)√ (2)× (3)√ 【解析】(1)$a\cos\alpha+b\sin\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha\right)$，令$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$，$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$，则$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha=\sin(\alpha+\varphi)$，所以$\tan\varphi=\frac{a}{b}$.

(2)$y=\sin x+a\cos x=\sqrt{a^2+1}\sin(x+\varphi)$，其中$\tan\varphi=a$，所以函数$y=\sin x+a\cos x$的最大值是$\sqrt{a^2+1}$.

(3)$y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，令$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数$y=\sqrt{3}\sin 2x-$

$\cos 2x$ 图象的对称中心是 $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}k\pi,0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

2. **解**：$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$，

令 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\sin\varphi$，$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$，则 $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\varphi)$.

【课中探究】

探究点一

例1 **解**：(1) $\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\sqrt{2}(\sin 15^\circ\cos 45^\circ+\cos 15^\circ\sin 45^\circ)=\sqrt{2}\sin(15^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(2) 原式 $=2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{12}\right)$.

方法一（化正弦）：原式 $=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$.

方法二（化余弦）：原式 $=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}\right)=-2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)=-2\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$.

(3) $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}=2\sqrt{2}$.

变式 (1) B (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}-x\right)$ 【解析】(1) $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{12}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=2$. 故选 B.

(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\frac{\sqrt{6}}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}\times 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\times\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\frac{\pi}{3}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}-x\right)$.

探究点二

例2 A 【解析】$y=\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，将函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$ 的图象，故选 A.

变式 B 【解析】$f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，则将函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，再将所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），可得 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象. 故选 B.

探究点三

例3 **解**：(1) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 2x=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)(i) 由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 又 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.

(ii) 由(i)知，$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增. 又 $f(0)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}$，所以当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，最大值为 2；

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $-\sqrt{3}$.

变式 ACD 【解析】$f(x)=\sqrt{6}\cos x-\sqrt{2}\sin x=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. 对于 A，易知函数 $f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$，∴A 正确；对于 B，∵ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}=0\neq\pm 2\sqrt{2}$，∴B 错误；对于 C，∵ $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$，∴C 正确；对于 D，∵当 $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right)$，∴易知函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增，∴D 正确. 故选 ACD.

2.4 积化和差与和差化积公式

【课前预习】

知识点

$\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ $-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

诊断分析

1. (1)√ (2)√ (3)√ (4)× 【解析】(4) $\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$.

2. **解**：都是任意角.

【课中探究】

探究点一

例1 **解**：(1) $\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ=\frac{1}{2}(\sin 90^\circ-\sin 50^\circ)-\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 40^\circ)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin 50^\circ+\frac{1}{2}\cos 40^\circ=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin 50^\circ+\frac{1}{2}\sin 50^\circ=\frac{1}{4}$.

(2) 原式 $=\cos 20^\circ+\frac{1}{2}+(\cos 100^\circ+\cos 140^\circ)=\cos 20^\circ+\frac{1}{2}+2\cos 120^\circ\cos 20^\circ=\cos 20^\circ+\frac{1}{2}-\cos 20^\circ=\frac{1}{2}$.

变式 **解**：(1) $\cos 15^\circ\cos 60^\circ\cos 75^\circ=\frac{1}{2}\cos 15^\circ\cos 75^\circ=\frac{1}{4}[\cos 90^\circ+\cos(-60^\circ)]=\frac{1}{8}$.

(2) $\cos 146^\circ+\cos 94^\circ+2\cos 47^\circ\cos 73^\circ=2\cos 120^\circ\cos 26^\circ+2\times\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 26^\circ)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\cos 26^\circ+$

$\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos 26°=-\cos 26°+\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos 26°=-\frac{1}{2}$.

探究点二

例 2　证明： 左边 $=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{2\alpha+\beta+\beta}{2}\sin\frac{2\alpha+\beta-\beta}{2}\right)=$ $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin\beta=$ 右边，所以原式成立.

变式　证明： 方法一：$\because \tan\frac{3x}{2}-\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=$

$\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$

$\frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin x}{\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}=$

$\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$，$\therefore$ 原式成立.

方法二：$\because \frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}=\frac{2\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)}=$

$\frac{2\left(\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=$

$\tan\frac{3x}{2}-\tan\frac{x}{2}$，$\therefore$ 原式成立.

§3　二倍角的三角函数公式

3.1　二倍角公式

【课前预习】

知识点一

1. $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　$2\sin\alpha\cos\alpha$
2. $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$　$2\cos^2\alpha-1$　$1-2\sin^2\alpha$
3. $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

诊断分析

(1)√　(2)×　(3)√　**【解析】**(2)二倍角的正弦、余弦公式对任意角都是适用的，而二倍角的正切公式，要求 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ 且 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

(3)当 $\alpha=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha$.

知识点二

1. $\sin 2\alpha$　$\cos 2\alpha$　$\cos 2\alpha$　$\cos 2\alpha$　$\tan 2\alpha$
2. $2\cos^2\alpha$　$2\sin^2\alpha$　$2\cos^2\frac{\alpha}{2}$　$2\sin^2\frac{\alpha}{2}$　$\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$　$\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

诊断分析

1. (1)×　(2)√　**【解析】**(1) $\frac{1}{2}\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{4}\sin 30°=\frac{1}{8}$.

(2) $1-2\sin^2 22.5°=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. **解：** $1\pm\sin 2\alpha=\sin^2\alpha\pm2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$.

【课中探究】

探究点一

例 1　解：(1)原式 $=\frac{2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1}{4}$.

(2)原式 $=\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}\right)=$ $-\left(\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)原式 $=\tan(2\times150°)=\tan 300°=\tan(360°-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}$.

(4)原式 $=\frac{2\sin 20°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°}{2\sin 20°}=$ $\frac{2\sin 40°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°}{4\sin 20°}=\frac{2\sin 80°\cdot\cos 80°}{8\sin 20°}=\frac{\sin 160°}{8\sin 20°}=$ $\frac{\sin 20°}{8\sin 20°}=\frac{1}{8}$.

变式　(1) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　(2) $\frac{1}{16}$　**【解析】**(1)原式 $=\frac{1}{2}\left(1-2\cos^2\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(2) $\sin 6°\sin 42°\sin 66°\sin 78°=\sin 6°\cos 48°\cos 24°\cos 12°=$ $\frac{2\cos 6°\sin 6°\cos 48°\cos 24°\cos 12°}{2\cos 6°}=$ $\frac{2\sin 12°\cos 12°\cos 48°\cos 24°}{4\cos 6°}=$ $\frac{2\sin 24°\cos 24°\cos 48°}{8\cos 6°}=\frac{2\sin 48°\cos 48°}{16\cos 6°}=\frac{\sin 96°}{16\cos 6°}=$ $\frac{\cos 6°}{16\cos 6°}=\frac{1}{16}$.

探究点二

例 2　(1)D　(2) $\frac{15}{16}$　**【解析】**(1)由 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right]=-\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}$，得 $\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{12}\right)=-\frac{1}{4}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{12}\right)-1=-\frac{7}{8}$. 故选 D.

(2)将 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{4}$ 两边平方可得 $\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$，即 $1-\sin 2\theta=\frac{1}{16}$，所以 $\sin 2\theta=\frac{15}{16}$.

(3)**解：** 由 $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{5}{2}$，得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{5}{2}$，

则 $\frac{2}{\sin 2\alpha}=\frac{5}{2}$，即 $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$.

因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\cos 2\alpha=-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=-\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$ $\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

探究点三

例 3　(1) $-2\cos\alpha$　(2)1　**【解析】**(1)原式 $=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}-\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$ $\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}-\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|-|\sin\alpha+\cos\alpha|$，$\because \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin\alpha>\cos\alpha>0$，$\therefore$ 原式 $=(\sin\alpha-\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\alpha)=-2\cos\alpha$.

(2)原式 $=\frac{\cos 2\alpha}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$ $\frac{\cos 2\alpha}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$ $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1$.

变式　(1)D　(2)0　**【解析】**(1)原式 $=\frac{\sin 2\theta+1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta+1+\cos 2\theta}=$ $\frac{2\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}=\tan\theta$. 故选 D.

(2) $\because \alpha$ 为第三象限角，$\therefore \cos\alpha<0$，$\sin\alpha<0$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}{\cos \alpha}-\dfrac{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}=\dfrac{\sqrt{2\cos^2\alpha}}{\cos \alpha}-\dfrac{\sqrt{2\sin^2\alpha}}{\sin \alpha}=\dfrac{-\sqrt{2}\cos \alpha}{\cos \alpha}-\dfrac{-\sqrt{2}\sin \alpha}{\sin \alpha}=0.$

探究点四

例 4 **解**：$S=S_{\triangle MOE}+S_{\triangle MOF}=\dfrac{1}{2}\times 2\sin x\times 2\cos x+\dfrac{1}{2}\times 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)\times 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)=\sin 2x+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，由题意要得到四边形 $MEOF$，则 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.2 半角公式

【课前预习】

知识点

$\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos \alpha}{2}}$ $\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos \alpha}{2}}$ $\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}$

$\dfrac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}$ $\dfrac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha}$

诊断分析

(1)× (2)× (3)√ **【解析】**(1)当 $\alpha=\pi$ 时，半角的正切公式不成立.

(2)只有当 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\dfrac{\alpha}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $-\pi+4k\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos \alpha}{2}}$.

(3)当 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}$ 时，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\cos \alpha$ 成立.

【课中探究】

探究点一

例 1 (1)2 **【解析】**由题意得 $\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=\dfrac{1}{5}$，即 $1-\sin \alpha=\dfrac{1}{5}$，$\therefore \sin \alpha=\dfrac{4}{5}$，$\because 450^\circ<\alpha<540^\circ$，$\therefore \cos \alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\therefore \tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{\dfrac{4}{5}}=2.$

(2)**解**：$\because \pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，$\sin \alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\therefore \cos \alpha=-\dfrac{3}{5}$，且 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}$，$\therefore \sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos \alpha}{2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos \alpha}{2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=-2.$

变式 (1)D (2)$\dfrac{7\sqrt{65}}{65}$ **【解析】**(1)$\because 5\pi<\theta<6\pi$，$\therefore \dfrac{5\pi}{4}<\dfrac{\theta}{4}<\dfrac{3\pi}{2}$. 又 $\cos\dfrac{\theta}{2}=m$，$\therefore \sin\dfrac{\theta}{4}=-\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\theta}{2}}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1-m}{2}}$. 故选 D.

(2)因为 α 为钝角，β 为锐角，$\sin \alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin \beta=\dfrac{12}{13}$，所以 $\cos \alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\cos \beta=\dfrac{5}{13}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos \alpha\cos \beta+\sin \alpha\sin \beta=\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{5}{13}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}=\dfrac{33}{65}$. 因为 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 且 $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha-\beta<\pi$，故 $0<\dfrac{\alpha-\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{33}{65}}{2}}=\dfrac{7\sqrt{65}}{65}$.

(3)**解**：$\because |\cos \theta|=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$，$\therefore \cos \theta=-\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{5\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{3\pi}{2}$，$\therefore \sin\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{3}{5}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{3}{5}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}}=2.$

例 2 **解**：原式 $=\dfrac{\left(2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\times 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}=\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}(-\cos \alpha)}{\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|}$. $\because 180^\circ<\alpha<360^\circ$，$\therefore 90^\circ<\dfrac{\alpha}{2}<180^\circ$，$\therefore \cos\dfrac{\alpha}{2}<0$，$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}(-\cos \alpha)}{-\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\cos \alpha$.

变式 **解**：$\because \alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，$\therefore \dfrac{\alpha}{2}\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\therefore \cos \alpha>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$，故原式 $=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2\alpha}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos \alpha}=\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=-\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

探究点二

例 3 **证明**：左边 $=\dfrac{\cos^2\alpha}{\dfrac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha}-\dfrac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\dfrac{2\cos \alpha}{\sin \alpha}}=\dfrac{\sin \alpha\cos \alpha}{2}=\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha=$ 右边，所以原式成立.

变式 **证明**：由 $x=2+\tan\dfrac{t}{2}$ 得 $x-2=\tan\dfrac{t}{2}=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$，故 $(x-2)^2=\left(\dfrac{\sin t}{1+\cos t}\right)^2=\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}=\dfrac{2-(1+\cos t)}{1+\cos t}=\dfrac{2}{1+\cos t}-1$，

又 $y=\dfrac{2}{1+\cos t}$，故 $(x-2)^2=y-1$，整理得 $y=x^2-4x+5$.

本章总结提升

【知识辨析】

1. × 2. √ 3. × 4. √ 5. √ 6. × 7. × 8. ×

【素养提升】

题型一

例 1 B **【解析】**由 $\dfrac{\cos x}{\sin x-1}=\dfrac{1}{2}$ 可知 $1-\sin x\neq 0$，所以 $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=\dfrac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}=\dfrac{\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)}=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{\cos x}{-(\sin x-1)}=-\dfrac{1}{2}$. 故选 B.

变式 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **【解析】**方法一：因为 $\tan \theta=\dfrac{\sin \theta}{\cos \theta}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\cos \theta=2\sin \theta$，代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{5}$，因为 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin \theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos \theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin \theta-\cos \theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

方法二：$(\sin \theta-\cos \theta)^2=1-2\sin \theta\cos \theta=1-\dfrac{2\sin \theta\cos \theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=$

$1-\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{5}$，因为 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}<1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\sin\theta<\cos\theta$，所以 $\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

题型二

例 2　解：(1) $\tan 70°\cdot\cos 10°(\sqrt{3}\tan 20°-1)=\dfrac{\sin 70°}{\cos 70°}\cdot\cos 10°\left(\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sin 20°}{\cos 20°}-1\right)=\dfrac{\cos 20°\cos 10°}{\sin 20°}\cdot\dfrac{\sqrt{3}\sin 20°-\cos 20°}{\cos 20°}=\dfrac{\cos 10°}{\sin 20°}\times 2\sin(20°-30°)=\dfrac{-\sin 20°}{\sin 20°}=-1$.

(2)证明：因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$，且 $\alpha\neq-\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\cos\alpha>0$，$\sin\alpha<0$，$1-\sin\alpha>0$，$\cos\alpha+\sin\alpha\neq 0$，所以 $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\sqrt{\dfrac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}+\dfrac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}+\dfrac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$. 所以原式得证.

变式　解：(1) $\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)(1+\sin 2\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\dfrac{\sin\alpha(1+2\sin\alpha\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\dfrac{\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sin\alpha$.

(2)证明：$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\dfrac{(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$，得证.

题型三

例 3　(1)D　(2)D　(3) $-\dfrac{\pi}{4}$　**［解析］**(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20°}-\dfrac{1}{\cos 20°}=\dfrac{\sqrt{3}\cos 20°-\sin 20°}{\sin 20°\cos 20°}=\dfrac{2\sin(60°-20°)}{\dfrac{1}{2}\sin 40°}=4$. 故选 D.

(2)由倍角公式可知 $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$，则 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$. 因为 α 为锐角，所以 $\dfrac{\alpha}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $0<\sin\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，故选 D.

(3)因为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\alpha-\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，又因为 $\cos 2\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，因为 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos 2\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin 2\alpha\sin(\alpha-\beta)=\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)\times\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\alpha+\beta\in\left(-\dfrac{3\pi}{4},0\right)$，所以 $\alpha+\beta=-\dfrac{\pi}{4}$.

变式　(1) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(2)A　(3)B　**［解析］**(1) $\tan 420°+\tan 510°=\tan(60°+2\times 180°)+\tan(-30°+3\times 180°)=\tan 60°+\tan(-30°)=\tan 60°-\tan 30°=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)∵ $\tan\alpha\tan\beta=2$，∴ $\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，又 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$，∴ $\cos\alpha\cos\beta=-m$，$\sin\alpha\sin\beta=-2m$，∴ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-3m$. 故选 A.

(3)依题意有 $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-3a,\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=3a+1,\end{cases}$ ∴ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{-3a}{1-(3a+1)}=1$. ∵ $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta<0,\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta>0,\end{cases}$ ∴ $\tan\alpha<0$ 且 $\tan\beta<0$，又 $\alpha,\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，∴ $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ 且 $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$，∴ $-\pi<\alpha+\beta<0$，∵ $\tan(\alpha+\beta)=1$，∴ $\alpha+\beta=-\dfrac{3\pi}{4}$. 故选 B.

题型四

例 4　解：(1)∵ $A(\sin 2x,1)$，$B\left(1,\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$，

∴ $\overrightarrow{OA}=(\sin 2x,1)$，$\overrightarrow{OB}=\left(1,\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$，

∴ $f(x)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sin 2x+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin 2x+\cos 2x\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，故函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)∵ $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，∴ $\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{4\pi}{3}$，

∴ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，∴当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值是 1，最小值是 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)由 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

变式　解：(1) $f(x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. 由 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{11\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{11\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)由 $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，得 $-\dfrac{5\pi}{6}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，则 $-1\leqslant\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值是 $\dfrac{1}{2}$，最小值是 -1.

题型五

例 5　解：$f(x)=\sin\left(2\omega x+\dfrac{2\pi}{3}\right)-2\sin^2\left(\omega x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2\omega x\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cos 2\omega x\sin\dfrac{2\pi}{3}-1+\cos\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x+\dfrac{1}{2}\sin 2\omega x-1=\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)-1$.

(1)当 $\omega=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-1$. 由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $2k\pi-\dfrac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，∴当 $\omega=\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\dfrac{5\pi}{6},2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)$f(x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$.
∵关于 x 的方程 $f(x)=-1,x\in(a,a+\pi]$有且仅有两个不等实根，即 $f(x)+1=0,x\in(a,a+\pi]$有且仅有两个不等实根，∴$\frac{\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$.

(3)由(2)得 $\omega=1$，∴$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$.

∵$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，∴$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$，∴$f(x)\in[-1,0]$.

∵不等式 $|f(x)+t|<1$ 对任意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$恒成立，∴$-1-t<f(x)<1-t$ 对任意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$恒成立，

∴$\begin{cases}-1-t<-1,\\1-t>0,\end{cases}$∴$0<t<1$，即实数 t 的取值范围为$(0,1)$.

变式 **解**：(1)$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\cos x+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 2x+1)+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{5}{12}\pi+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)由 $af\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-f\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)\geqslant 2$ 得 $a\sin x-\cos x\geqslant 2$，所以当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$时，

$a\geqslant\frac{2+\cos x}{\sin x}$恒成立，即 $a\geqslant\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)_{\max}$.

$\frac{2+\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{3\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$,

令 $t=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$时，$\tan\frac{x}{2}\in\left[\sqrt{2}-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，所以 $t\in\left[\sqrt{2}-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，则$\frac{2+\cos x}{\sin x}=\frac{3+t^2}{2t}=\frac{3}{2t}+\frac{t}{2}$，

因为 $y=\frac{3}{2t}+\frac{t}{2}$ 在$\left[\sqrt{2}-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$上单调递减，所以当 $t=\sqrt{2}-1$ 时，$\left(\frac{3}{2t}+\frac{t}{2}\right)_{\max}=2\sqrt{2}+1$，即当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)_{\max}=2\sqrt{2}+1$，所以 $a\geqslant 2\sqrt{2}+1$.

例 6 **解**：(1)$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

若 $f(x)=\frac{1}{2}$，则 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，可得 $\sin\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$.

(2)$h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin 2x$,

设 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

则 $h(x)=2(t^2-1)$，由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，得$\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，则$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，故 $1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$. 原方程变为 $kt+2(t^2-1)+5=2t^2+kt+3=0$，其中 $1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

令 $g(t)=2t^2+kt+3$，$1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，则 $g(t)$有 2 个零点，需满足方程 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时有 2 个根，则 $1\leqslant t<\sqrt{2}$，需进一步满足 $g(t)$在$[1,\sqrt{2})$上有 2 个零点，则

$\begin{cases}g(1)=2+k+3\geqslant 0,\\1<-\frac{k}{2\times 2}<\sqrt{2},\\\Delta=k^2-4\times 2\times 3>0,\\g(\sqrt{2})=2\times(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}k+3>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{7\sqrt{2}}{2}<k<-2\sqrt{6}$，

即 k 的取值范围是$\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{6}\right)$.

第五章 复数

§1 复数的概念及其几何意义

1.1 复数的概念

【课前预习】

知识点一

1. (1)-1 $i^2=-1$ (2)加法、乘法
2. $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 实部 $\mathrm{Re}\,z$ 虚部 $\mathrm{Im}\,z$

知识点二

1. $(b=0)$ $(b\neq 0)$ 2. (1)全体复数 **C**

诊断分析

1. (1)× (2)× (3)√ 【解析】(1)当 $b=0$ 时，复数 $z=bi$ 是实数.
(2)该方程在复数范围内有解.
(3)依据复数的分类可知，当 $z=0$ 时，$a=b=0$，故 $a+b=0$.
2. $\subsetneqq$ $\subsetneqq$ $\subsetneqq$ $\subsetneqq$ $\subsetneqq$

知识点三

$a=c$ 且 $b=d$

诊断分析

1. (1)√ (2)× 【解析】(1)如果两个复数的实部的差和虚部的差都为 0，那么这两个复数的实部和虚部分别相等，故这两个复数相等.
(2)两个复数相等，当且仅当这两个复数的实部与虚部分别相等.
2. **解**：由题意得 $a=1,b=3$，所以 $a+b=4$.

【课中探究】

探究点一

例 1 AB 【解析】对于 A，实数集是复数集的真子集，A 正确；对于 B，若 z 是虚数，则 z 一定不是实数，B 正确；对于 C，复数 $a+i(a\in\mathbf{R})$的虚部是 1，C 错误；对于 D，-1 的平方根为 $\pm i$，D 错误. 故选 AB.

变式 A 【解析】复数 $z=3-4i$ 的实部为 3，虚部为 -4，则 z 的实部与虚部的和为 $3-4=-1$.

探究点二

例 2 (1)D 【解析】由 $a,b\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，$z_1=z_2$，可得 $2-ai=b-1+2i$，则$\begin{cases}2=b-1,\\-a=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-2,\\b=3.\end{cases}$故选 D.

(2)**解**：∵$x,y\in\mathbf{R}$，且 $x^2-y^2+2xyi=2i$，

∴$\begin{cases}x^2-y^2=0,\\2xy=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

变式 (1)7 【解析】因为 $x+(y-1)i=3+xi$，$x,y\in\mathbf{R}$，所以 $x=3,y-1=x$，即 $x=3,y=4$，所以 $x+y=7$.

(2)**解**：设方程的实数根为 $x=m$，

则 $3m^2-\frac{a}{2}m-1=(10-m-2m^2)i$,

$\therefore\begin{cases}3m^2-\dfrac{a}{2}m-1=0,\\10-m-2m^2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\a=11\end{cases}$或$\begin{cases}m=-\dfrac{5}{2},\\a=-\dfrac{71}{5},\end{cases}$

故实数 a 的值为 11 或 $-\dfrac{71}{5}$.

探究点三

探索 **解**:当 $b=0$ 时,$a+bi$ 是实数;当 $b\neq0$ 时,$a+bi$ 是虚数;当 $a=0,b\neq0$ 时,$a+bi$ 是纯虚数.

例 3 **解**:(1)因为 $z=(m^2-1)+(m-1)i$ 为实数,所以 $m-1=0$,解得 $m=1$.

(2)因为 $z=(m^2-1)+(m-1)i$ 为虚数,所以 $m-1\neq0$,解得 $m\neq1$.

(3)因为 $z=(m^2-1)+(m-1)i$ 为纯虚数,

所以$\begin{cases}m^2-1=0,\\m-1\neq0,\end{cases}$解得 $m=-1$.

变式 **解**:(1)由 $z\in\mathbf{R}$,得$\begin{cases}m^2+2m-3=0,\\m-1\neq0,\end{cases}$解得 $m=-3$.

(2)由 z 是虚数,得 $m^2+2m-3\neq0$,且 $m-1\neq0$,解得 $m\neq1$ 且 $m\neq-3$.

(3)由 z 是纯虚数,得$\begin{cases}m(m+2)=0,\\m-1\neq0,\\m^2+2m-3\neq0,\end{cases}$解得 $m=0$ 或 $m=-2$.

1.2 复数的几何意义

【课前预习】

知识点一

复平面 实轴 虚轴 原点

诊断分析

(1)√ (2)× (3)× **【解析】**(2)在复平面内,纯虚数对应的点都在虚轴上,除原点外,虚轴上的点都表示纯虚数.

(3)复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 可以用复平面内的点 $Z(a,b)$ 表示.

知识点二

1. $Z(a,b)$ 2. $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$

诊断分析

(1)× (2)× **【解析】**(1)复数与平面向量是两个不同的概念.

(2)复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 与起点是原点的向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ 是一一对应的.当向量的起点在原点时,该向量可由终点唯一确定,从而可与该终点对应的复数建立一一对应关系.

知识点三

(1)模 $|z|$ $|a+bi|$ (2)$\sqrt{a^2+b^2}$ $|a|$

诊断分析

(1)× (2)√ **【解析】**(1)复数的模还有可能是零.

知识点四

(1)相等 互为相反数 (2)$a-bi$

诊断分析

(1)√ (2)√ (3)√

【课中探究】

探究点一

例 1 (1)$2+4i$ $2-4i$ $2-4i$ **【解析】** 复数 $6+5i$,$-2+3i$ 在复平面内对应的点分别为 $A(6,5)$,$B(-2,3)$,则 $C(2,4)$,故向量 $\overrightarrow{OC}$ 对应的复数为 $2+4i$,其共轭复数为 $2-4i$,向量 $\overrightarrow{OC'}$ 对应的复数为 $2-4i$.

(2)**解**:在复平面内,复数 $z=(m^2-m-2)+(m^2-3m+2)i$ 对应的点为 (m^2-m-2,m^2-3m+2).

①若该点在虚轴上,则 $m^2-m-2=0$,

解得 $m=2$ 或 $m=-1$.

②若该点在第二象限,则$\begin{cases}m^2-m-2<0,\\m^2-3m+2>0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}-1<m<2,\\m<1\text{ 或 }m>2,\end{cases}\therefore -1<m<1$.

③若该点在直线 $y=x$ 上,

则 $m^2-m-2=m^2-3m+2$,$\therefore m=2$.

变式 **解**:记 O 为复平面的原点,设 $\overrightarrow{OD}=(x,y)$,由题意得 $\overrightarrow{OA}=(2,3)$,$\overrightarrow{OB}=(3,2)$,$\overrightarrow{OC}=(-2,-3)$,则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(x-2,y-3)$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-5,-5)$.因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,所以$\begin{cases}x-2=-5,\\y-3=-5,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3,\\y=-2,\end{cases}$故点 D 对应的复数为 $-3-2i$.

探究点二

例 2 (1)B (2)5 (3)$-1+\sqrt{3}i$ **【解析】**(1)因为 $x+xi=1+yi$,$x,y\in\mathbf{R}$,所以 $x=y=1$,则 $|x+yi|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.故选 B.

(2)因为复数 $z=3+4i$,所以 $\bar{z}=3-4i$,所以 $|\bar{z}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

(3)因为 $z=a+\sqrt{3}i(a\in\mathbf{R})$ 在复平面内对应的点位于第二象限,所以 $a<0$.由 $|z|=2$,得 $\sqrt{3+a^2}=2$,解得 $a=-1$ 或 $a=1$(舍去),所以 $z=-1+\sqrt{3}i$.

变式 (1)D (2)D **【解析】**(1)两个虚数不能比较大小,故 A,B 错误;$|z_1|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$,$|z_2|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$,所以 $|z_1|<|z_2|$,故 C 错误,D 正确.故选 D.

(2)依题意,设复数 $z=a+2ai(a\in\mathbf{R})$,由 $|z|=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}$,解得 $a=\pm1$,故 $z=1+2i$ 或 $z=-1-2i$.故选 D.

探究点三

探索 **解**:复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$,其几何意义是复平面内点 (a,b) 到坐标原点的距离.复数的模是非负实数,可以比较大小.

例 3 **解**:(1)$|z_1|=|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$,$|z_2|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$,所以 $|z_1|>|z_2|$.

(2)由 $|z|=|z_1|=2$ 知 $|\overrightarrow{OZ}|=2$(O 为坐标原点),即点 Z 到原点的距离为 2,所以点 Z 的集合是以原点为圆心,以 2 为半径的圆.

变式 **解**:(1)设 O 为原点,复数 z 的模等于 3,这表明,复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度等于 3,即点 Z 到原点 O 的距离等于 3,因此满足条件 $|z|=3$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心,以 3 为半径的圆.

(2)不等式 $4\leqslant|z|\leqslant5$ 可以化为不等式组$\begin{cases}|z|\leqslant5,\\|z|\geqslant4.\end{cases}$满足 $|z|\leqslant5$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心,以 5 为半径的圆及其内部所有的点构成的集合;满足 $|z|\geqslant4$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心,以 4 为半径的圆及其外部所有的点构成的集合.因此满足 $4\leqslant|z|\leqslant5$ 的点 Z 的集合是这两个集合的交集,即以原点 O 为圆心,以 4 和 5 为半径的两圆所夹的圆环,并包括圆环的边界.

§2 复数的四则运算

2.1 复数的加法与减法

【课前预习】

知识点一

1. (1)复数 实部的和 虚部的和 $(a+c)+(b+d)i$

(2)复数 实部的差 虚部的差 $(a-c)+(b-d)i$

2. (1)$z_1+(z_2+z_3)$ (2)z_2+z_1

诊断分析

1. (1)√ (2)√ (3)× **【解析】**(3)两个虚数的差可以等于实数,当然可以比零大,但是两个虚数是不能比较大小的.

2. $-2+2i$ **【解析】**$(-3-4i)+(2+i)-(1-5i)=-3+2-1+(-4+1+5)i=-2+2i$.

知识点二

1. $(a+c,b+d)$ $(a+c)+(b+d)i$

2. $(a-c,b-d)$ $(a-c)+(b-d)i$

诊断分析

(1)√ (2)√ (3)√

【课中探究】

探究点一

探索 **解**:两个或两个以上的复数相加就是把它们的实部与实部、虚部与虚部分别相加.

例 1 (1)$2-\sqrt{3}i$ (2)$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **【解析】**(1)$(-1+\sqrt{3}i)+$

$(3-2\sqrt{3}i)=(-1+3)+(\sqrt{3}-2\sqrt{3})i=2-\sqrt{3}i.$

(2)$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i.$

(3)**解**：因为 $z_1=x+2i,z_2=3-yi,z_1+z_2=5-6i$，所以 $(x+3)+(2-y)i=5-6i$，所以 $\begin{cases}x+3=5,\\2-y=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=8,\end{cases}$ 所以 $z_1-z_2=(2+2i)-(3-8i)=(2-3)+[2-(-8)]i=-1+10i.$

变式 (1)B (2)$9-5i$ **【解析】**(1)设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$，由 $\bar{z}-z=2i$ 可得 $-2bi=2i$，则 $b=-1$，即 z 的虚部为 -1，故选 B.

(2)因为 $z+1+2i=10-3i$，所以 $z=(10-3i)-(1+2i)=9-5i.$

探究点二

例 2 **解**：(1)因为 $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$，所以 $\overrightarrow{AO}$ 对应的复数为 $-3-2i$.

(2)因为 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{CA}$ 对应的复数为 $(3+2i)-(-2+4i)=5-2i$，所以 $|AC|=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$.

(3)因为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$，所以 $|OB|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$.

变式 **解**：(1)因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数分别为 $3+2i$ 与 $1+4i$，所以 $\overrightarrow{AB}=(3,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,4)$. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1,4)-(3,2)=(-2,2)$，所以 $\overrightarrow{AD}$ 对应的复数是 $-2+2i$.

(2)$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=(3,2)-(-2,2)=(5,0)$，

所以 $\overrightarrow{DB}$ 对应的复数是 5.

探究点三

探索 **解**：满足 $|z|=1$ 的所有复数 z 对应的点的集合是以原点为圆心，1 为半径的圆. 满足 $|z-z_0|=r(r>0)$ 的所有复数 z 对应的点的集合是以 z_0 对应的点为圆心，r 为半径的圆.

例 3 (1)1 **【解析】**若 $|z|=2$，则复数 z 在复平面内对应的点 Z 在以原点 O 为圆心，2 为半径(记为 r)的圆上. $|z-1|$ 表示该圆上的点到点 $A(1,0)$ 的距离，由 $|AO|=1$ 得 $|z-1|$ 的最小值为 $|r-|AO||=1$.

(2)**解**：方法一：在复平面内分别作出 z_1,z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，并作向量 $\overrightarrow{OZ}$，使 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=\overrightarrow{OZ}$(其中 O 为坐标原点)，连接 Z_1Z,Z_2Z,Z_1Z_2.

$\because|z_1|=|z_2|=1,|z_1+z_2|=\sqrt{2}$，$\therefore\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线.

$\because|z_1|=|z_2|=1$，$\therefore$ 四边形 OZ_1ZZ_2 为菱形，

又 $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$，$\therefore\angle Z_1OZ_2=90°$，

$\therefore$ 四边形 OZ_1ZZ_2 为正方形，$\therefore|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

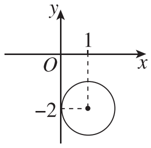
方法二：设 $z_1=a+bi,z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

由题知 $a^2+b^2=1,c^2+d^2=1,(a+c)^2+(b+d)^2=2.$

$\because(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2=2$，

$\therefore 2ac+2bd=0$，$\therefore|z_1-z_2|^2=(a-c)^2+(b-d)^2=a^2+c^2+b^2+d^2-(2ac+2bd)=2$，$\therefore|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

变式 C **【解析】**根据复数模的几何意义可知，$|z-1+2i|=1$ 表示复平面内与复数 z 对应的点构成以 $(1,-2)$ 为圆心，1 为半径的圆，如图所示，$|z|$ 表示该圆上的点到原点的距离，由图可知，$|z|_{\min}=\sqrt{1^2+(-2)^2}-1=\sqrt{5}-1$. 故选 C.



2.2 复数的乘法与除法

*2.3 复数乘法几何意义初探

【课前预习】

知识点一

1. $(ac-bd)+(ad+bc)i$
2. $z_2\cdot z_1$　$z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$　$z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$
3. (1)$\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}$　(2)z^{m+n}　z^{mn}　$z_1^n\cdot z_2^n$

(3)1　i　-1　$-i$

4. 实数

诊断分析

(1)√　(2)×　(3)×　(4)×　**【解析】**(2)例如，$z_1=1$，$z_2=i$，满足 $z_1^2+z_2^2=0$，但不满足 $z_1=z_2=0$.

(3)例如，$|i|^2=1$，而 $i^2=-1$.

(4)因为 $\omega=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$，所以 $\omega^3=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2\times\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)=\frac{3-2\sqrt{3}i-1}{4}\times\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{\sqrt{3}-i-3i-\sqrt{3}}{4}=-i.$

知识点二

1. 1　$\frac{1}{z_2}$　2. $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$

诊断分析

解：实数的除法可以直接约分化简得出结果，但复数的除法中分母为复数，一般不能直接约分化简. 由于两个共轭复数的乘积是一个实数，因此，两个复数相除时，可以先把它们的商写成分式的形式，然后把分子、分母同乘分母的共轭复数(注意是分母的共轭复数)，再把结果化简即可.

知识点三

c　数乘　伸长　压缩　$\overrightarrow{OZ_1}$　$\frac{\pi}{2}$

【课中探究】

探究点一

例 1 **解**：(1)$(1+2i)^2=1+4i+4i^2=-3+4i.$

(2)$(1+2i)(3-4i)(-2-i)=(11+2i)(-2-i)=-20-15i.$

变式 (1)B (2)-4 **【解析】**(1)$(1-2i)(a+i)=a+i-2ai+2=(a+2)+(1-2a)i$，根据题意可得 $\begin{cases}a+2=0,\\1-2a\neq0,\end{cases}$ 可得 $a=-2$. 故选 B.

(2)因为 $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$，所以 $(1-i)^4=[(1-i)^2]^2=(-2i)^2=-4.$

探究点二

例 2 **解**：(1)$\frac{(1+2i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{-3+4i+3-3i}{2+i}=\frac{i}{2+i}=\frac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2i-i^2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.$

(2)$\frac{(1-4i)(1+i)+2+4i}{3+4i}=\frac{5-3i+2+4i}{3+4i}=\frac{7+i}{3+4i}=\frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{21-28i+3i+4}{25}=\frac{25-25i}{25}=1-i.$

变式 (1)$\sqrt{5}$ (2)C **【解析】**(1)由题意得 $z=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4+2i}{2}=2+i$，则 $|z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

(2)由题得 $z=\frac{(1+i)^2}{3+4i}=\frac{2i}{3+4i}=\frac{2i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$，

故复数 z 的虚部为 $\frac{6}{25}$. 故选 C.

探究点三

探索 **解**：由 $3x^2+3x+2=0$，得 $x^2+x=-\frac{2}{3}$，则 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{5}{12}$，解得 $x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{6}i$，即 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{6}i$，所以原方程的解是 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{6}i$.

例 3 **解**：由 $x^3+x^2+x+1=0$，得 $x^2(x+1)+(x+1)=0$，即 $(x+1)(x^2+1)=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=i$ 或 $x=-i$，所以原方程的解是 -1 或 i 或 $-i$.

变式 -2 **【解析】**因为 $1+i$ 是关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2+kx+2=0$ 的一个虚根，所以 $1-i$ 也是关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2+kx+2=0$ 的一个虚根，则 $1+i+(1-i)=-k$，解得 $k=-2$.

探究点四

例 4 C **【解析】**由 $z_1=2+2i$，得 $z_2=z_1\cdot(3i)=-6+6i$，所以 $\overrightarrow{OZ_1}=(2,2)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(-6,6)$，结合复数乘法的几何意义可得 $\overrightarrow{OZ_2}$ 是将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 沿原方向伸长 3 倍，再逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到的. 故选 C.

*§3 复数的三角表示

3.1 复数的三角表示式

3.2 复数乘除运算的几何意义

【课前预习】

知识点一

1. 辐角 三角表示式 三角形式 代数形式
2. $0\leqslant\theta<2\pi$ $\arg z$ 3. 模 辐角的主值

诊断分析

(1)√ (2)× (3)× 【解析】(2)复数 $z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$的辐角的主值为$-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$,故错误.

(3)两个非零复数相等当且仅当它们的模与辐角的主值分别相等.

知识点二

2. (1) $\sqrt{a^2+b^2}$ $\frac{a}{r}$ $\frac{b}{r}$ (2)$r\cos\theta$ $r\sin\theta$

知识点三

1. $r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$ 模的积 辐角的和
2. θ_2 $|\theta_2|$ r_2

诊断分析

(1)× (2)√ 【解析】(1)∵$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$,$z_2=r_2(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_2[\cos(-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(-\theta_2)]$,∴$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

知识点四

1. $\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$ 2. θ_2 $|\theta_2|$ $\frac{1}{r_2}$

诊断分析

(1)√ (2)√

【课中探究】

探究点一

例1 (1)B (2)D (3)D 【解析】(1)$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$,故B正确;经检验,A,C,D都错误.故选B.

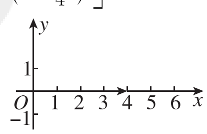
(2)因为$z=2(\cos 30°-\mathrm{i}\sin 30°)=2(\cos 330°+\mathrm{i}\sin 330°)$,所以其辐角的主值是330°.故选D.

(3)根据复数的三角形式的特点可知只有$z=\frac{1}{2}(\cos 30°+\mathrm{i}\sin 30°)$是复数的三角形式.故选D.

探究点二

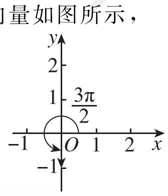
探索 **解**:不一定.在复数的三角形式$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$中,辐角$\theta$可以取辐角的主值,也可以取其他辐角值.如$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

例2 **解**:(1)复数4对应的向量如图所示,



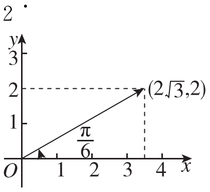
则$r=4$.因为与4对应的点在x轴正半轴上,所以$\arg 4=0$.于是$4=4(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$.

(2)复数$-\mathrm{i}$对应的向量如图所示,



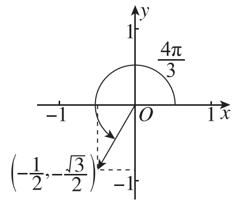
则$r=\sqrt{(-1)^2}=1$.因为与$-\mathrm{i}$对应的点在y轴负半轴上,所以$\arg(-\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}$.于是$-\mathrm{i}=\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}$.

(3)复数$2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$对应的向量如图所示,



则$r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$,$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.因为与$2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$对应的点在第一象限,所以$\arg(2\sqrt{3}+2\mathrm{i})=\frac{\pi}{6}$.于是$2\sqrt{3}+2\mathrm{i}=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

(4)复数$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$对应的向量如图所示,



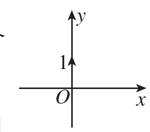
则$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$,$\cos\theta=-\frac{1}{2}$.

因为与$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$对应的点在第三象限,

所以$\arg\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{4\pi}{3}$.

于是$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}$.

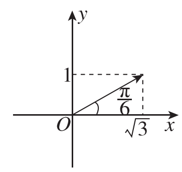
例3 **解**:(1)复数$\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$的模$r=1$,一个辐角$\theta=\frac{\pi}{2}$,



所以$\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=0+\mathrm{i}=\mathrm{i}$.

所以在复平面内对应的向量如图所示.

(2)复数$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$的模$r=2$,一个辐角$\theta=\frac{\pi}{6}$,



所以$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}+\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{i}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2}\mathrm{i}=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

所以在复平面内对应的向量如图所示.

变式 (1)B (2)D 【解析】(1)$z=3+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.故选B.

(2)$z=4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)=4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{i}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\mathrm{i}$.故选D.

探究点三

例4 **解**:(1)原式$=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\mathrm{i}$.

(2)原式$=16\times2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]=32\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=16+16\sqrt{3}\mathrm{i}$.

变式 **解**:(1)$3\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\times2\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=6\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=6$.

(2)$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\times\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i}$.

(3)因为$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$,所以$(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^6=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6=2^6\left[\cos\left(6\times\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(6\times\frac{\pi}{3}\right)\right]=64(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi)=64$.

探究点四

例5 **解**：$\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\div\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\sqrt{3}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)\right]=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-4i$.

变式 **解**：(1) $\left[\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]\div\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\div\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}i$.

(2) $(1-i)\div\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\div\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{2}\times\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)i\right]=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$.

探究点五

探索 $1-i$ **【解析】** $(1+i)\times\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\times\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=1-i$.

例6 **解**：连接 OC，OB，要求点 C 对应的复数，即求向量 $\overrightarrow{OC}$ 对应的复数，因为 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$，所以可以先求向量 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数.

向量 $\overrightarrow{BC}$ 可以看作向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度扩大为原来的 $\sqrt{3}$ 倍，并绕点 B 按顺时针方向旋转 $90°$ 后得到的，因为向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $(-1+2i)-(1+i)=-2+i$，所以向量 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $(-2+i)\times\sqrt{3}\times[\cos(-90°)+i\sin(-90°)]=\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$，于是点 C 对应的复数为 $(\sqrt{3}+2\sqrt{3}i)+(1+i)=(\sqrt{3}+1)+(2\sqrt{3}+1)i$.

同理可得点 D 对应的复数为 $(\sqrt{3}-1)+(2\sqrt{3}+2)i$.

本章总结提升

【知识辨析】

1. × **【解析】** 规定 a，b 都为实数才行.
2. × **【解析】** 两个虚数不能比较大小.
3. × **【解析】** 实数的共轭复数是其本身，两数之差为零，是实数.
4. × **【解析】** z 的虚部大于零，但是实部可正、可负、也可以为零.
5. √ 6. √ 7. √
8. × **【解析】** 由题意可得 $|z|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\bar{z}=4-3i$，则 $\frac{\bar{z}}{|z|}=\frac{4-3i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$.
9. √ **【解析】** $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

【素养提升】

题型一

例1 **解**：(1)复数 $z=(m^2+5m+6)+(m^2-2m-8)i(m\in\mathbf{R})$ 的实部为 m^2+5m+6，虚部为 m^2-2m-8，

由 z 是实数，得 $m^2-2m-8=0$，解得 $m=4$ 或 $m=-2$，所以当 $m=4$ 或 $m=-2$ 时复数 z 为实数.

(2)由 z 是虚数，得 $m^2-2m-8\neq0$，解得 $m\neq4$ 且 $m\neq-2$，所以当 $m\neq4$ 且 $m\neq-2$ 时复数 z 为虚数.

(3)由 z 是纯虚数，得 $\begin{cases}m^2+5m+6=0,\\m^2-2m-8\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=-3$，所以当 $m=-3$ 时复数 z 为纯虚数.

(4)由 $z=0$，得 $\begin{cases}m^2+5m+6=0,\\m^2-2m-8=0,\end{cases}$ 解得 $m=-2$，所以当 $m=-2$ 时复数 $z=0$.

变式 (1)ABC (2)$\frac{9}{5}$ **【解析】** (1)由题可知 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$，则 z 的虚部为 -1，$|z|=|1-i|=\sqrt{2}$，$z^2=(1-i)^2=1-2i-1=-2i$，为纯虚数，z 的共轭复数为 $1+i$. 故选 ABC.

(2)因为复数 $z=m+(2m-1)i$ 的模是 $\sqrt{10}$，且其虚部大于 0，所以 $\sqrt{m^2+(2m-1)^2}=\sqrt{10}$ 且 $2m-1>0$，解得 $m=\frac{9}{5}$.

题型二

例2 **解**：(1) $\frac{(-1+i)(2+i)}{i^3}=\frac{-2-i+2i-1}{-i}=\frac{-3+i}{-i}=\frac{(-3+i)i}{-i^2}=-1-3i$.

(2) $\frac{(1+2i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{1+4i-4+3-3i}{2+i}=\frac{i}{2+i}=\frac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$.

(3) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}=\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^6+\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}=\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^6+\frac{\sqrt{6}+2i+3i-\sqrt{6}}{5}=i^6+i=i^2+i=-1+i$.

变式 (1)C (2)B (3)D (4)A **【解析】** (1)由题可得 $z=(1+i)(z-1)$，则 $z=\frac{1+i}{i}=1-i$.

(2)由 $(3-4i)z=|4+3i|$，得 $z=\frac{|4+3i|}{3-4i}=\frac{5}{3-4i}=\frac{5\times(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$，所以 $\bar{z}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$，故 $\bar{z}$ 的虚部为 $-\frac{4}{5}$. 故选 B.

(3)由 $z(2-i^3)=3-i$，得 $z(2+i)=3-i$，则 $z=\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5-5i}{5}=1-i$，所以复数 z 的虚部是 -1. 故选 D.

(4)因为 $z=5+i$，所以 $\bar{z}=5-i$，$z+\bar{z}=10$，则 $i(\bar{z}+z)=10i$，故选 A.

题型三

例3 (1)D (2)C **【解析】** (1)令 $z=x+yi$，$x,y\in\mathbf{R}$，则 z 在复平面内对应的点为 (x,y). 由 $|z-3+4i|=1$，得 $(x-3)^2+(y+4)^2=1$，则点 (x,y) 在以 $(3,-4)$ 为圆心，1 为半径的圆上，位于第四象限，故选 D.

(2)因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})$，所以 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $3+2i-[(-2+i)+(1+5i)]=4-4i$. 故选 C.

变式 (1)A (2)B **【解析】** (1)因为 $(1+3i)(3-i)=3-i+9i-3i^2=6+8i$，所以 $(1+3i)(3-i)$ 在复平面内对应的点为 $(6,8)$，位于第一象限，故选 A.

(2)由题意知 $A(1,-1)$，$B(2,-1)$，$C(3,1)$，设点 $D(x,y)$，则 $\overrightarrow{AB}=(1,0)$，$\overrightarrow{DC}=(3-x,1-y)$，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则 $\begin{cases}3-x=1,\\1-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 则 $D(2,1)$，点 D 对应的复数为 $2+i$. 故选 B.

例4 $2\sqrt{3}$ **【解析】** 方法一：设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z_2=\sqrt{3}+i-(a+bi)=(\sqrt{3}-a)+(1-b)i$，

故 $\begin{cases}|z_1|^2=a^2+b^2=4,\\|z_2|^2=(\sqrt{3}-a)^2+(1-b)^2=a^2+b^2-2\sqrt{3}a-2b+4=4,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a^2+b^2=4,\\a^2+b^2-2\sqrt{3}a-2b=0.\end{cases}$ 又 $z_1-z_2=(2a-\sqrt{3})+(2b-$

$1)\mathrm{i}$，$\therefore |z_1-z_2|^2=(2a-\sqrt{3})^2+(2b-1)^2=4a^2+4b^2-4\sqrt{3}a-4b+4=2(a^2+b^2)+2(a^2+b^2-2\sqrt{3}a-2b)+4=2\times4+4=12$，$\therefore |z_1-z_2|=2\sqrt{3}$.

方法二：在复平面内，设 z_1,z_2 对应的向量分别为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$. $\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2$，$\therefore 4+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=16$，得 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$，即 $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$.

变式 A 【解析】$|z|=2$ 表示复平面内复数 z 对应的点的轨迹为以原点 O 为圆心，2 为半径的圆，$|z+3+4\mathrm{i}|=|z-(-3-4\mathrm{i})|$ 表示该圆上的点到复数 $-3-4\mathrm{i}$ 对应的点 $A(-3,-4)$ 的距离，易知 $|OA|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5>2$，所以 $|z+3+4\mathrm{i}|$ 的最小值是 $|OA|-2=3$. 故选 A.

题型四

例 5 (1)A 【解析】$z_1z_2=2\sqrt{6}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)\times\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{6}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)\times\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)=2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(\pi+\frac{11\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{11\pi}{6}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\sqrt{6}+\sqrt{2}\mathrm{i}$，故选 A.

(2)**解**：由复数乘法的几何意义得 $z_1\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=z_2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. $\because z_2=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$，$\therefore z_1=\dfrac{2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}}=2\left[\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$，$z_1$ 的辐角的主值为 $\frac{3\pi}{4}$.

变式 (1)C 【解析】由 $(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx$，可得 $\left(\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)^{2026}=\cos\frac{2026\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2026\pi}{5}=\cos\left(404\pi+\pi+\frac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(404\pi+\pi+\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$，因为 $-\cos\frac{\pi}{5}<0$，$-\sin\frac{\pi}{5}<0$，所以复数 $\left(\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)^{2026}$ 在复平面内所对应的点位于第三象限. 故选 C.

(2)**解**：$z_1=-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos225^\circ+\mathrm{i}\sin225^\circ)$.
根据题设条件得 $z_2=\sqrt{2}(\cos225^\circ+\mathrm{i}\sin225^\circ)\times2(\cos135^\circ+\mathrm{i}\sin135^\circ)=2\sqrt{2}[\cos(225^\circ+135^\circ)+\mathrm{i}\sin(225^\circ+135^\circ)]=2\sqrt{2}(\cos360^\circ+\mathrm{i}\sin360^\circ)=2\sqrt{2}$，$z_2$ 的辐角的主值为 0°.

第六章 立体几何初步

§1 基本立体图形

1.1 构成空间几何体的基本元素

1.2 简单多面体——棱柱、棱锥和棱台

【课前预习】

知识点一

1. 点 线(直线和曲线) 面(平面和曲面)
2. ①平行四边形 45° 两 虚线

诊断分析

(1)× (2)× (3)× 【解析】平面是无限延展的，不计面积，而平行四边形是平面的一部分，它是不能无限延展的，故(1)(3)错误；有时依据具体情况，可以用其他平面图形，如圆、三角形等表示平面，故(2)错误.

知识点二

1. 平面多边形 面 棱 顶点 2. 平行 四边形
3. (1)侧面平行四边形都是矩形 (2)除了直棱柱以外 (3)正多边形的直棱柱 (4)平行四边形

诊断分析

1. (1)× (2)× (3)× (4)× (5)× (6)× 【解析】对于(1)(2)(3)(4)分别构造反例图形如下. 如图 A，平面 $ABCD$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 平行，其余各面均为四边形，但它不是棱柱，故(1)错误. 如图 B，正六棱柱的相对侧面 ABB_1A_1 与侧面 EDD_1E_1 平行，但不是底面，故(2)错误. 如图 C，正四棱柱的底面 $ABCD$ 是平行四边形，故(3)错误. 如图 D，该几何体有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形，很明显这个几何体不是棱柱，故(4)错误. 长方体是直四棱柱，但直四棱柱不一定是长方体，故(5)错误. 正三棱柱的三个侧面都是矩形，故(6)错误.

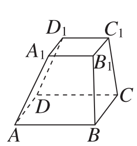


图 A

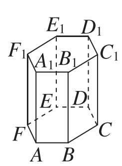


图 B

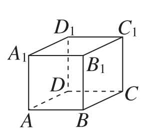


图 C

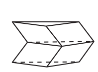


图 D

2. **解**：因为螺栓的头部模型为正六棱柱，所以它有 12 个顶点，18 条棱，8 个面，其中有 4 对互相平行的面，能作为棱柱底面的只有 1 对.

知识点三

多边形 三角形 四面体 正多边形 正棱锥 斜高

诊断分析

(1)× (2)× (3)√ 【解析】(1)正四面体是三棱锥.
(2)底面是正多边形，且侧棱长都相等的棱锥才是正棱锥，若侧棱长不都相等，则不是正棱锥，所以该说法错误.

知识点四

平行 正棱台 斜高

诊断分析

(1)× (2)√ (3)× (4)× 【解析】(1)四棱台要求侧棱延长后交于一点，上、下两个底面平行且是相似四边形的几何体不一定符合要求.
(3)棱台的侧棱长不一定相等.
(4)用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分才是棱台.

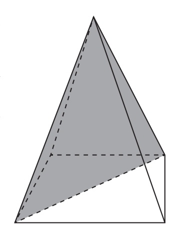
【课中探究】

探究点一

例 1 (1)ACD (2)D 【解析】(1)平面可以用希腊字母 α,β,γ 表示，故 A 正确；平面可以用表示平行四边形的顶点的两个相对顶点的字母表示，故 C 正确；平面可以用表示平行四边形的顶点的字母表示，故 D 正确；平面不可以用表示平行四边形的某条边上的两个顶点的字母表示，故 B 不正确. 故选 ACD.
(2)A 中没有画出交线；B 中不可见的线没有画成虚线；C 中虚、实线没按画图规则画，也不正确；D 中的画法正确. 故选 D.

探究点二

例 2 (1)ACD (2)①②③ 【解析】(1)对于 A，各个侧面都是矩形，且底面也是矩形的棱柱才是长方体，A 中说法错误. 对于 B，底面是正多边形的直棱柱是正棱柱，B 中说法正确. 对于 C，正三棱锥的底面是正三角形，且顶点在过底面中心且与底面垂直的直线上，所以正三棱锥的侧棱长不一定与底面边长相等，C 中说法错误. 对于 D，当直四棱柱的底面是菱形而不是正方形时，底面四条边的长相等，但这样的直四棱柱不是正四棱柱，D 中说法错误. 故选 ACD.
(2)对于①，棱台的侧面一定是梯形，而不是平行四边形，故①正确；对于②，由棱锥的定义知棱锥的侧面只能是三角形，故②正确；对于③，由四个面围成的封闭图形只能是三棱锥，故③正确；对于④，如图所示，四棱锥被平面截成的两部分可以都是棱锥，故④错误. 故填①②③.



探究点三

例3 **解**：截面 $BCFE$ 上方的部分是棱柱，且是三棱柱 BEB_1-CFC_1，其中$\triangle BEB_1$ 和$\triangle CFC_1$ 是底面．截面 $BCFE$ 下方的部分也是棱柱，且是四棱柱 $ABEA_1$-$DCFD_1$，其中四边形 $ABEA_1$ 和四边形 $DCFD_1$ 是底面．

变式 (1)B 【解析】截去三棱锥 B_1-A_1C_1B 后，剩余的几何体可看作以 B 为顶点，以梯形 ACC_1A_1 为底面的四棱锥．故选 B．

(2)**解**：∵E，F 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，且 $A_1B_1=AB$，$A_1C_1=AC$，$B_1C_1=BC$，∴$\frac{A_1E}{AB}=\frac{A_1F}{AC}=\frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$，

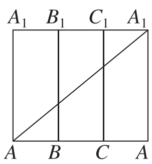
∴$\triangle A_1EF\backsim\triangle ABC$，且 AA_1，BE，CF 延长后交于一点．

又平面 $A_1B_1C_1$ 与平面 ABC 平行，

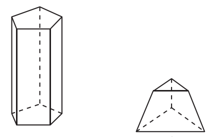
∴几何体 A_1EF-ABC 是三棱台．

探究点四

例4 (1)$\sqrt{61}$ 【解析】沿着正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的侧棱 AA_1"剪开"，把正三棱柱的侧面展开形成一个平面图形，如图所示，所得平面图形是一个长为 $3\times2=6$(cm)，宽为 5cm 的矩形，则矩形的对角线长为 $\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$(cm)，即所求最短路线的长为 $\sqrt{61}$ cm．



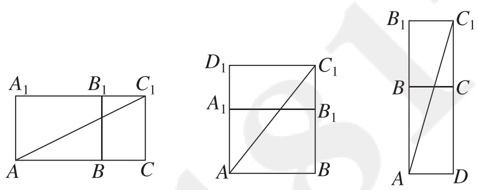
(2)**解**：根据表面展开图，可得两个几何体如图①②所示，则①为五棱柱，②为三棱台．



① ②

变式 (1)C (2)$\sqrt{41}$ 【解析】(1)①②可折成正四面体，③④不论选哪一个三角形作底面折叠都不能折成正四面体．故选 C．

(2)若小虫沿面 ABB_1A_1 与面 BCC_1B_1(或面 ADD_1A_1 与面 DCC_1D_1)到达点 C_1，如图①，则最短路程为 $\sqrt{(4+2)^2+3^2}=3\sqrt{5}$；若小虫沿面 ABB_1A_1 与面 $A_1B_1C_1D_1$(或面 $ABCD$ 与面 DCC_1D_1)到达点 C_1，如图②，则最短路程为 $\sqrt{4^2+(2+3)^2}=\sqrt{41}$；若小虫沿面 $ABCD$ 与面 BCC_1B_1(或面 ADD_1A_1 与面 $A_1B_1C_1D_1$) 到达点 C_1，如图③，则最短路程为 $\sqrt{2^2+(3+4)^2}=\sqrt{53}$．综上所述，小虫走过的最短路程为 $\sqrt{41}$．



① ② ③

1.3 简单旋转体——球、圆柱、圆锥和圆台

【课前预习】

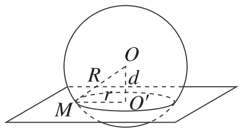
知识点一

直径 球面 球体 半径 圆 球心 半径 旋转面 旋转体

诊断分析

1. (1)× (2)× (3)× (4)√ 【解析】(1)根据球的概念可知，半圆以它的直径所在的直线为旋转轴，旋转一周所形成的曲面叫作球面，球面所围成的几何体叫球．
(2)连接球面上两点并且经过球心的线段叫作球的直径．
(3)在空间中，到定点的距离等于定长的所有点的集合叫作球面，不叫球．
(4)连接球心(即为截面圆圆心)和球面上任意一点(取截面圆上任意一点)的线段叫作球的半径．

2. **解**：R，r，d 之间的关系为 $d=\sqrt{R^2-r^2}$．理由如下：



如图所示，设 O 是球心，O'是截面圆圆心，M 是截面圆上一点，连接 OO'，OM，$O'M$，易知图中 $OM=R$，$O'M=r$，$OO'=d$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle OO'M$ 中，由勾股定理，得 $r^2+d^2=R^2$，即 $d=\sqrt{R^2-r^2}$．

知识点二

矩形的一边 一条直角边 垂直于底边的腰 平行于圆锥底面 底面与截面 旋转轴 旋转轴 不垂直于旋转轴 不垂直于旋转轴的边 全等的矩形 等腰三角形 等腰梯形

诊断分析

1. (1)× (2)× (3)√ (4)√ 【解析】(1)无论旋转到什么位置，平行于旋转轴的边都叫作圆柱的母线．在圆柱的上、下底面圆周上各取一点，这两点的连线不一定平行于旋转轴．
(2)圆锥的侧面展开图为扇形，这个扇形的半径等于圆锥的母线长，大于底面圆的半径．
(3)由于圆台可认为是用平行于圆锥底面的平面截得的，故两条母线所在的直线一定相交．
(4)圆柱、圆锥、圆台的底面都是由线段绕一端点旋转一周得到的，都是圆．

2. **解**：圆台可以看作由直角梯形以垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，其余各边旋转一周而形成的面所围成的几何体．圆台也可以看作由等腰梯形以其底边的中垂线为旋转轴，各边旋转 180°而形成的面所围成的几何体．
类比棱台的定义，还可以是用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面和截面之间的部分称为圆台．

【课中探究】

探究点一

例1 C 【解析】对于①，若截面与底面不平行，则该几何体不是旋转体，故①不正确；对于②，用平行于圆锥底面的平面截去一个小圆锥后剩余的部分是圆台，故②正确；对于③，由母线的概念可知③正确．故选 C．

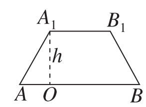
变式 D 【解析】对于 A，以直角三角形的斜边所在直线为轴旋转一周形成的几何体是两个圆锥的组合体，A 错误；对于 B，以直角梯形不垂直于底边的腰所在直线为旋转轴旋转一周形成的几何体不是圆台，B 错误；对于 C，圆锥只有一个底面，C 错误；对于 D，圆锥的侧面展开图是扇形，这个扇形的半径等于圆锥的母线长，大于圆锥的高，D 正确．故选 D．

探究点二

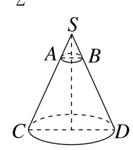
例2 **解**：设球的半径为 R cm，截面圆的半径为 r cm，球心到截面圆圆心的距离为 d cm，则 $R=25$，$\pi r^2=49\pi$，所以 $r=7$，又 $r^2+d^2=R^2$，所以 $d=\sqrt{25^2-7^2}=24$．因此球心到截面的距离为 24 cm．

变式 B 【解析】根据题意得球的半径 $r=\sqrt{5+4}=3$(cm)．故选 B．

例3 **解**：(1)根据题意轴截面的高即为圆台的高，轴截面如图所示，过 A_1 作 $A_1O\perp AB$ 于点 O，则 $AA_1=1$，$AO=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $A_1O=\sqrt{AA_1^2-AO^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以圆台的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$．



(2)如图所示，由题意知 $SB=3$，$\frac{SB}{SD}=\frac{1}{4}$，所以 $SD=12$，$BD=12-3=9$，因此圆台的母线长为 9．

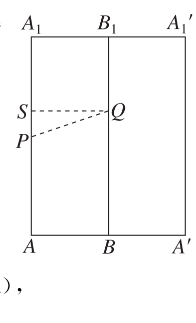


变式 $2\sqrt{2}$ 【解析】设底面的半径为 r，因为底面的面积为 4π，所以 $\pi r^2=4\pi$，可得 $r=2$，

所以圆锥的高 $h=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$．

探究点三

例4 **解**：将圆柱的侧面沿母线 AA_1 展开，得到如图所示的矩形，连接 PQ，



则蚂蚁爬过的最短路程为线段 PQ 的长．

设圆柱的底面半径为 r，则 $r=10$ cm，

所以 $A_1B_1=\frac{1}{2}\times2\pi r=\pi r=10\pi$(cm)．

过点 Q 作 $QS\perp AA_1$ 于点 S，

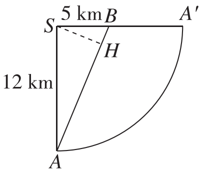
在 $\mathrm{Rt}\triangle PQS$ 中，$PS=80-40-30=10$(cm)，$QS=A_1B_1=10\pi$ cm，

所以 $PQ=\sqrt{PS^2+QS^2}=10\sqrt{\pi^2+1}$(cm)，

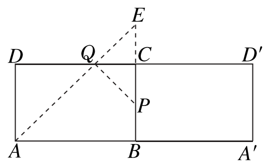
则蚂蚁爬过的最短路程是 $10\sqrt{\pi^2+1}$ cm．

变式 D 【解析】因为底面半径为 3 km，高为 $3\sqrt{15}$ km，所以

母线长为$\sqrt{3^2+(3\sqrt{15})^2}=12$(km),底面圆的周长为$2\pi r=6\pi$(km),则圆锥侧面展开图的圆心角$\alpha=\frac{6\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$,如图所示,显然观光公路的最短长度为$AB=\sqrt{12^2+5^2}=13$(km),由点$S$向$AB$作垂线,垂足为点$H$,此时$SH$为点$S$与线段$AB$上的点的距离的最小值,即点$H$为公路的最高点,$AH$段为上坡路段,$HB$段为下坡路段.由射影定理知$SA^2=AH\cdot AB$,即$12^2=13AH$,解得$AH=\frac{144}{13}$ km,所以公路上坡路段的长为$\frac{144}{13}$ km.故选D.



拓展 $\sqrt{\pi^2+9}$ **【解析】** 如图,在圆柱的侧面展开图中,$AB=\pi$,$AD=2$,问题转化为在CD上找一点Q,使$AQ+PQ$最短.作点P关于CD所在直线的对称点E,连接AE,则$AQ+PQ$的最小值就是AE,可得$AE=\sqrt{\pi^2+9}$.



§2 直观图

【课前预习】

知识点

(2)45° 90° 水平平面 (3)x' y' z' (4)不变 一半

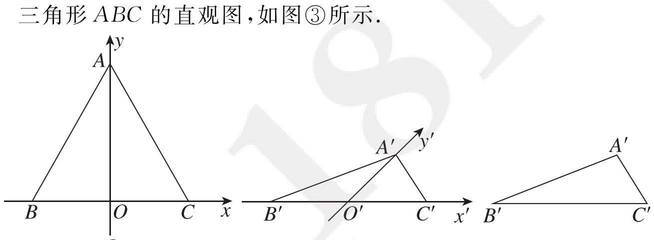
诊断分析

1. (1)× (2)× (3)× (4)× **【解析】**(1)如正方形(四个内角都相等)的直观图为平行四边形(相邻的内角互补,相对的内角相等).
(2)根据斜二测画法的特点可知,原图中垂直的线段在直观图中不垂直.
(3)水平放置的正方形的直观图是一个平行四边形.
(4)水平放置的正方形的直观图中邻边长度不相等.
2. **解:**在直观图中平行于x'轴的线段在平面图形中长度不变,但平行于y'轴的线段在平面图形中长度变为它的2倍.

【课中探究】

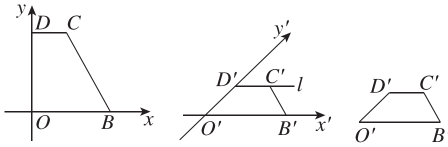
探究点一

例1 解:(1)如图①所示,以BC边所在的直线为x轴,以BC边上的高AO所在的直线为y轴,建立平面直角坐标系xOy.
(2)如图②,画对应的x'轴、y'轴,使$\angle x'O'y'=45°$.
在x'轴上截取$O'B'=O'C'=2$ cm,在y'轴上截取$O'A'=\frac{1}{2}OA$,连接$A'B'$,$A'C'$.
(3)擦去辅助线x'轴,y'轴及点O',则三角形$A'B'C'$即为正三角形ABC的直观图,如图③所示.



① ② ③

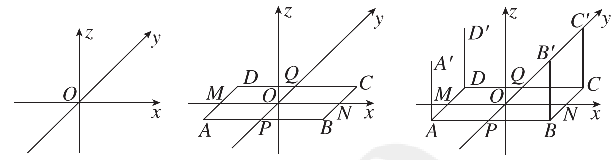
变式 解:(1)在已知的直角梯形$OBCD$中,以底边OB所在直线为x轴,垂直于OB的腰OD所在直线为y轴,建立平面直角坐标系xOy,如图①所示.
(2)画出x'轴和y'轴,使$\angle x'O'y'=45°$,在x'轴上截取$O'B'=OB$,在y'轴上截取$O'D'=\frac{1}{2}OD$,过点D'作x'轴的平行线l,在l上沿x'轴正方向取点C',使得$D'C'=DC$,连接$B'C'$,如图②.
(3)擦去辅助线x'轴,y'轴和l,所得四边形$O'B'C'D'$就是直角梯形$OBCD$的直观图,如图③.



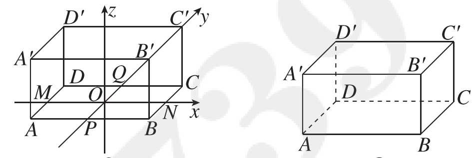
① ② ③

探究点二

例2 解:(1)画轴.画x轴、y轴、z轴三轴交于点O,使$\angle xOy=45°$,$\angle xOz=90°$,如图①.
(2)画底面.以O为中点,在x轴上取线段MN,使$MN=4$ cm,在y轴上取线段PQ,使$PQ=1.5$ cm.
分别过点M和N作y轴的平行线,过点P和Q作x轴的平行线,设它们的交点分别为A,B,C,D,则四边形$ABCD$就是长方体的底面的直观图,如图②.
(3)画侧棱.过A,B,C,D四点分别作z轴的平行线,并在这些平行线上分别截取2 cm长的线段AA',BB',CC',DD',如图③.
(4)连线成图.顺次连接A',B',C',D',如图④,擦去辅助线,且将被遮线画成虚线,就得到长方体的直观图,如图⑤.

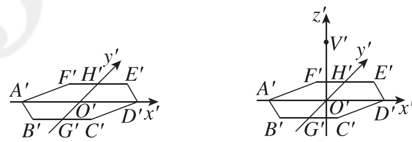


① ② ③

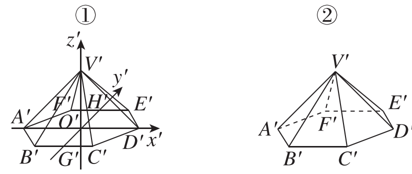


④ ⑤

变式 解:(1)先用斜二测画法画出边长为3 cm的正六边形的直观图,如图①所示.
(2)过点O'建立z'轴(z'轴垂直x'轴),在z'轴上截取$O'V'=3$ cm,如图②所示.
(3)连接$V'A'$,$V'B'$,$V'C'$,$V'D'$,$V'E'$,$V'F'$,如图③所示.
(4)擦去辅助线,遮挡部分用虚线表示,即得到正六棱锥的直观图,如图④所示.



① ②



③ ④

探究点三

例3 D **【解析】** 由题图知,$AC=2$,$BC=2$,且$AC\perp BC$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.故选D.

变式 $8\sqrt{2}$ **【解析】** 在正方形$O'A'B'C'$中可得$B'O'=\sqrt{2}A'O'=2\sqrt{2}$,由斜二测画法的特点可知$BO=2B'O'=4\sqrt{2}$,$AO=A'O'=2$,且$OA\perp OB$,$OA/\!/BC$,$AB/\!/CO$,所以四边形$OABC$为平行四边形,所以四边形$OABC$的面积是$BO\cdot AO=4\sqrt{2}\times2=8\sqrt{2}$.

§3 空间点、直线、平面之间的位置关系

3.1 空间图形基本位置关系的认识

3.2 刻画空间点、线、面位置关系的公理

第1课时 空间点、线、面之间的位置关系的认识及基本事实1,2,3

【课前预习】

知识点一

诊断分析

(1)× (2)× (3)√ **【解析】**(1)点A在直线l上用符号表示为$A\in l$.
(2)直线l在平面α内用符号表示为$l\subset\alpha$.

知识点二

1. 不在一条直线上 两个点 一个 一条过该点

2. 该直线外　相交　平行

诊断分析

(1)√　(2)×　(3)×　(4)√　**【解析】**(1)因为前轮着地点、后轮着地点、脚撑着地点三点在一个平面上,且这三个着地点不在同一条直线上,所以根据推论1知自行车有一个脚撑就可站稳.

(2)由线段AB在平面α内知直线AB上至少有两点在平面α内,则由基本事实2知,直线AB在平面α内.

(3)由基本事实3知,两个平面的交线是一条直线.

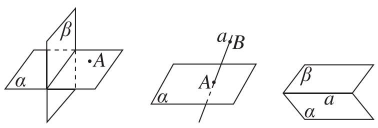
【课中探究】

探究点一

例1　解:(1)$A\in\alpha$,$A\notin\beta$.(如图①)

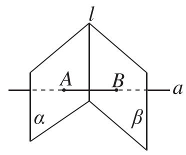
(2)$A\in a$,$B\in a$,$A\in\alpha$,$B\notin\alpha$.(如图②)

(3)$\alpha\cap\beta=a$.(如图③)

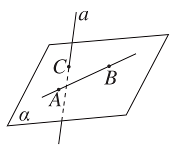


①　②　③

变式　解:(1)用符号表示为$\alpha\cap\beta=l$,$a\cap\alpha=A$,$a\cap\beta=B$,如图所示.



(2)用符号表示为$A\in\alpha$,$B\in\alpha$,$a\cap\alpha=C$,$C\notin$直线AB,如图所示.



探究点二

例2　证明:由题知$AB\neq A_1B_1$,则四边形AA_1B_1B为梯形,
∴AA_1与BB_1相交,设其交点为S,则$S\in BB_1$.
∵$BB_1\subset$平面BCC_1B_1,∴$S\in$平面BCC_1B_1.同理可证,$S\in$平面ACC_1A_1.故点S在平面BCC_1B_1与平面ACC_1A_1的交线上,即$S\in CC_1$,∴AA_1,BB_1,CC_1三线共点.

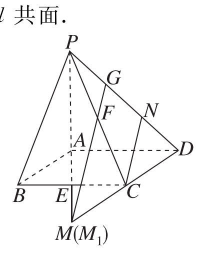
变式　证明:∵$EG\cap FH=P$,∴$P\in EG$,又$EG\subset$平面ABC,∴$P\in$平面ABC.同理,$P\in$平面ADC.∴P是平面ABC与平面ADC的公共点.又平面$ABC\cap$平面$ADC=AC$,∴$P\in AC$,∴P,A,C三点共线.

探究点三

例3　证明:方法一(纳入法):∵$l_1\cap l_2=A$,∴l_1和l_2确定一个平面α.∵$l_2\cap l_3=B$,∴$B\in l_2$.
又$l_2\subset\alpha$,∴$B\in\alpha$.同理可证$C\in\alpha$.
∵$B\in l_3$,$C\in l_3$,∴$l_3\subset\alpha$,∴直线l_1,l_2,l_3在同一平面内.
方法二(同一法):∵$l_1\cap l_2=A$,∴l_1和l_2确定一个平面α.
∵$l_2\cap l_3=B$,∴l_2和l_3确定一个平面β.
∵$A\in l_2$,$l_2\subset\alpha$,∴$A\in\alpha$.∵$A\in l_2$,$l_2\subset\beta$,∴$A\in\beta$.
同理可证$B\in\alpha$,$B\in\beta$,$C\in\alpha$,$C\in\beta$.
∴不共线的三个点A,B,C既在平面α内,又在平面β内,
∴平面α和β重合,即直线l_1,l_2,l_3在同一平面内.

变式　证明:因为$a\parallel b$,所以a和b确定一个平面α,又$l\cap a=A$,$l\cap b=B$,所以$A\in\alpha$,$B\in\alpha$,故$l\subset\alpha$.因为$a\parallel c$,所以a和c确定一个平面β,又$l\cap a=A$,$l\cap c=C$,所以$A\in\beta$,$C\in\beta$,故$l\subset\beta$.则l和a既在平面α内又在平面β内,又l与a相交,所以平面α与平面β重合,即直线a,b,c,l共面.

拓展　证明:在平面$ABCD$内,连接AE并延长,交DC的延长线于点M,则有$CM=CD$.在平面PCD内,连接GF并延长,交DC的延长线于点M_1.取GD的中点N,连接CN,



则由$PG=\frac{1}{3}PD$可知$PG=GN=ND$.
∵点F为PC的中点,
∴$FG\parallel CN$,即$GM_1\parallel CN$,
∴在$\triangle GM_1D$中有$CM_1=CD$,∴点M与点M_1重合,即AE与GF相交于点M,∴A,E,F,G四点共面.

第2课时　基本事实4、异面直线和等角定理

【课前预习】

知识点一

平行　$a\parallel c$　传递性

诊断分析

(1)√　(2)√

知识点二

1. 不同在任何一个平面内(不共面)的两条直线
3. 在同一平面内,有且只有一个公共点　在同一平面内,没有公共点　不同在任何一个平面内,没有公共点

诊断分析

1. (1)×　(2)√　(3)×　(4)×　**【解析】**(1)错误,分别在两个平面内的两条直线可能相交,可能平行,也可能异面.
(2)正确,两直线如果不是异面直线,那么它们相交或者平行.
(3)错误,这两直线可能相交或异面.
(4)错误,a,c也可能是平行直线,还可能是相交直线.
2. **解:**两种.设该直线与平面的交点为P,则当平面内的某条直线不过点P时,该直线与这个平面内的这条直线异面;当平面内的某条直线经过点P时,该直线与这个平面内的这条直线相交.

知识点三

相等　互补

诊断分析

(1)×　(2)×

知识点四

a'与b'　直角　$a\perp b$

诊断分析

(1)×　(2)×

【课中探究】

探究点一

探索　解:成立.这就是本节学习的基本事实4:平行于同一条直线的两条直线互相平行.

例1　证明:在四棱柱$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中,由棱柱的性质知,四边形AA_1B_1B和四边形BB_1C_1C都是平行四边形,
所以$AA_1\parallel BB_1$,且$AA_1=BB_1$,$BB_1\parallel CC_1$,且$BB_1=CC_1$,
所以由基本事实4知$AA_1\parallel CC_1$,且$AA_1=CC_1$,
所以四边形ACC_1A_1为平行四边形.

例2　证明:连接AC.在$\triangle ABC$中,因为E,F分别是AB,BC的中点,所以$EF\parallel AC$.因为$AA_1\parallel CC_1$,$AA_1=CC_1$,
所以四边形AA_1C_1C是平行四边形,所以$AC\parallel A_1C_1$.所以$EF\parallel A_1C_1$.

变式　解:(1)∵$\frac{AE}{EB}=\frac{AH}{HD}=\lambda$,$\frac{CF}{FB}=\frac{CG}{GD}=\mu$,
∴$EH\parallel BD$,$FG\parallel BD$,∴$EH\parallel FG$,$\frac{EH}{BD}=\frac{AE}{AB}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$,$\frac{FG}{BD}=\frac{CF}{CB}=\frac{\mu}{1+\mu}$,又$\lambda=\mu$,∴$EH=FG$,
∴四边形$EFGH$是平行四边形.
(2)由(1)可知,当$\lambda\neq\mu$时,$EH\neq FG$,$EH\parallel FG$,
∴四边形$EFGH$是梯形.
(3)∵$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$,∴由(1)可知四边形$EFGH$是平行四边形,
又$EG\perp HF$,∴平行四边形$EFGH$是菱形.∴$EH=GH$,
又$\frac{EH}{BD}=\frac{1}{3}$,$\frac{GH}{AC}=\frac{2}{3}$,∴$\frac{AC}{BD}=\frac{1}{2}$.

探究点二

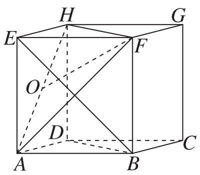
例3　证明:因为P,N分别为AB,AC的中点,所以$PN\parallel BC$.
因为M,N分别为A_1C_1,AC的中点,所以$A_1M\mathrel{\underline{\parallel}}NC$,所以四边形$A_1NCM$为平行四边形,所以$A_1N\parallel MC$.由$PN\parallel BC$,$A_1N\parallel MC$及$\angle PNA_1$与$\angle BCM$对应边的方向相同,可得$\angle PNA_1=\angle BCM$.

变式　解:$\triangle EFG\backsim\triangle C_1DA_1$.证明如下:
连接B_1C,因为G,F分别为BC,BB_1的中点,所以$GF\parallel B_1C$.因为$CD\mathrel{\underline{\parallel}}AB$,$A_1B_1\mathrel{\underline{\parallel}}AB$,所以$CD\mathrel{\underline{\parallel}}A_1B_1$,
所以四边形A_1B_1CD为平行四边形,所以$A_1D\mathrel{\underline{\parallel}}B_1C$.
因为$B_1C\parallel FG$,所以$A_1D\parallel FG$.
同理可得,$A_1C_1\parallel EG$,$DC_1\parallel EF$.

因为$\angle DA_1C_1$与$\angle FGE$，$\angle A_1DC_1$与$\angle GFE$，$\angle DC_1A_1$与$\angle FEG$的两边分别对应平行且均为锐角，
所以$\angle DA_1C_1=\angle FGE$，$\angle A_1DC_1=\angle GFE$，$\angle DC_1A_1=\angle FEG$，所以$\triangle EFG\backsim\triangle C_1DA_1$.

探究点三

例4 **解**：(1)因为$DH/\!/AE$，所以$\angle AEB$即为异面直线BE与DH的夹角.
在$\triangle AEB$中，$\angle AEB=45°$，所以BE与DH的夹角为$45°$.
(2)如图，连接FH，则$HF/\!/BD$，所以$\angle HFO$(或其补角)为异面直线FO与BD的夹角.



连接HA，AF，易得$FH=HA=AF$，
所以$\triangle AFH$为等边三角形.
又O为AH的中点，所以$\angle HFO=30°$，
即FO与BD的夹角为$30°$.

变式 C 【解析】在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，连接AB_1，AD_1，AC，由M，P分别为A_1B，A_1D的中点，得M，P分别为AB_1，AD_1的中点.因为N，Q分别为B_1D_1，CD_1的中点，所以$MN/\!/AD_1$，$PQ/\!/AC$，因此$\angle CAD_1$或其补角是异面直线MN与PQ的夹角.在$\triangle CAD_1$中，$AC=AD_1=CD_1$，则$\angle CAD_1=\frac{\pi}{3}$，所以异面直线$MN$与$PQ$的夹角的大小是$\frac{\pi}{3}$.故选C.

§4 平行关系

4.1 直线与平面平行

第1课时 直线与平面平行的性质

【课前预习】

知识点

平行 平行 线线平行

诊断分析

1. (1)√ (2)× (3)× 【解析】(2)如果一条直线与一个平面平行，那么这条直线与这个平面内直线的位置关系是平行或异面.
(3)平行于同一平面的两条直线可能相交、平行或异面.
2. **解**：当另一条直线与这个平面无公共点时，另一条直线与这个平面平行；当另一条直线与这个平面有公共点时，另一条直线在这个平面内.

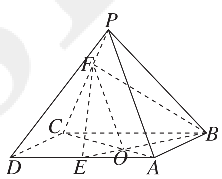
【课中探究】

探究点一

探索 **解**：(1)利用直线与平面平行的性质定理；(2)利用基本事实4.

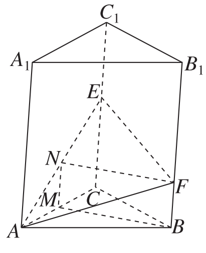
例1 **证明**：因为$EF/\!/$平面$ABCD$，$EF\subset$平面PAC，平面$PAC\cap$平面$ABCD=AC$，所以由线面平行的性质定理可得$EF/\!/AC$.

变式 $\frac{1}{2}$ 【解析】如图，连接AC，交BE于点O，连接OF.因为$AD/\!/BC$，E为AD的中点，所以$\frac{AO}{OC}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$.因为$PA/\!/$平面$EBF$，平面$EBF\cap$平面$PAC=OF$，$PA\subset$平面$PAC$，所以$PA/\!/OF$.所以$\frac{PF}{FC}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{2}$.



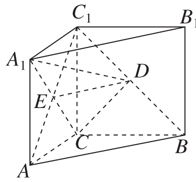
探究点二

例2 **解**：如图所示，过F，B，M作平面$FBMN$，记平面$FBMN$与AE的交点为N，



因为$BF/\!/$平面AA_1C_1C，
$BF\subset$平面$FBMN$，
平面$FBMN\cap$平面$AA_1C_1C=MN$，
所以$BF/\!/MN$.因为$MB/\!/$平面AEF，
$MB\subset$平面$FBMN$，
平面$FBMN\cap$平面$AEF=FN$，所以$MB/\!/FN$，
所以四边形$BFNM$是平行四边形，所以$MN=BF=1$.
又$MN/\!/BF$，$EC/\!/BF$，$EC=2BF=2$，
所以$MN/\!/EC$，$MN=\frac{1}{2}EC=1$，
所以MN是$\triangle ACE$的中位线.故M是AC的中点.

变式 **解**：如图，连接AC_1，交A_1C于点E，连接DE，



则E为AC_1的中点，且平面$A_1CD\cap$平面$ABC_1=DE$.
又因为$AB/\!/$平面A_1CD，$AB\subset$平面ABC_1，所以$AB/\!/DE$，
所以D为BC_1的中点，
则实数λ的值为$\frac{1}{2}$.

第2课时 直线与平面平行的判定

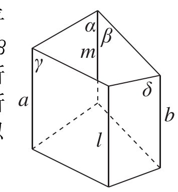
【课前预习】

知识点

平面外一条直线 $l/\!/\alpha$

诊断分析

1. (1)× (2)× (3)√ 【解析】(1)只有当这条直线在这个平面外时，这条直线才与这个平面平行.
(2)过直线外一点可作唯一的一条直线与已知直线平行，而经过所作直线的平面有无数个，根据直线与平面平行的判定定理知，这些平面(除经过已知直线与所作直线的平面)都与已知直线平行.
(3)如图，$l/\!/\alpha$，$l/\!/\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，过直线l作平面γ与平面α交于直线a，作平面δ交平面β于直线b，a，b与l不重合，因为$l/\!/\alpha$，$l/\!/\beta$，所以$l/\!/a$，$l/\!/b$，所以$a/\!/b$，因为$a\not\subset\beta$，$b\subset\beta$，所以$a/\!/\beta$，又$a\subset\alpha$，$\alpha\cap\beta=m$，所以$a/\!/m$，所以$l/\!/m$.因此命题正确.



2. **解**：平行.
3. **解**：平行或在此平面内.

【课中探究】

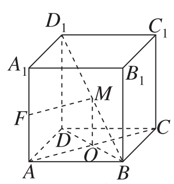
探究点一

例1 D 【解析】对于A，直线l上有无数个点不在平面α内，不能说明直线与平面无公共点，故A不正确；对于B，缺少直线l在平面α外这一条件，故B不正确；对于C，直线l也可能在平面α内，故C不正确；对于D，由直线与平面平行的定义，可知D正确.故选D.

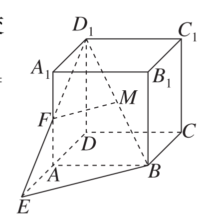
变式 A 【解析】因为$b/\!/\alpha$，所以$b\not\subset\alpha$且存在$c\subset\alpha$使得$b/\!/c$.若$a/\!/b$，则$a/\!/c$，又$a\not\subset\alpha$且$c\subset\alpha$，所以$a/\!/\alpha$，充分性成立.若$a/\!/\alpha$，则a，b可能相交，可能平行，也可能异面，所以必要性不成立.故选A.

探究点二

例2 **证明**：方法一：如图所示，连接AC，BD，交于点O，连接OM，



则$OM/\!/D_1D$且$OM=\frac{1}{2}D_1D$.
又$AF=\frac{1}{2}A_1A$，$AA_1/\!/DD_1$且$AA_1=DD_1$，$\therefore OM/\!/AF$且$OM=AF$，$\therefore$四边形$MOAF$是平行四边形，$\therefore MF/\!/OA$.$\because OA\subset$平面$ABCD$，$MF\not\subset$平面$ABCD$，$\therefore MF/\!/$平面$ABCD$.
方法二：如图所示，连接D_1F并延长，交DA的延长线于点E，连接BE，



在$\triangle D_1DE$中，$\because AF/\!/DD_1$且$AF=\frac{1}{2}DD_1$，$\therefore F$是D_1E的中点，
$\therefore FM$是$\triangle BED_1$的中位线，$\therefore FM/\!/BE$，
$\because BE\subset$平面$ABCD$，$MF\not\subset$平面$ABCD$，
$\therefore MF/\!/$平面$ABCD$.

变式 **证明**：取PA的中点N，连接EN，DN，因为E是PB的中点，所以$EN/\!/AB$，$EN=\frac{1}{2}AB$.
因为四边形$ABCD$为正方形，F是CD的中点，所以$DF/\!/AB$，$DF=\frac{1}{2}AB$，所以$EN/\!/DF$，$EN=DF$，
所以四边形$ENDF$为平行四边形，所以$EF/\!/DN$.
因为$EF\not\subset$平面PAD，$DN\subset$平面PAD，
所以$EF/\!/$平面PAD.

探究点三

例 3 **证明**:(1)连接 AC,交 BD 于点 O,连接 OG.
因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 O 为 AC 的中点,
又 G 为 FC 的中点,所以 $AF/\!/OG$.因为 $OG\subset$平面 BGD,$AF\not\subset$平面 BGD,所以 $AF/\!/$平面 BGD.
(2)因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $AB/\!/CD$.
因为 $CD\subset$平面 $DCFE$,$AB\not\subset$平面 $DCFE$,
所以 $AB/\!/$平面 $DCFE$.因为 $AB\subset$平面 $ABFE$,平面 $DCFE\cap$平面 $ABFE=EF$,所以 $AB/\!/EF$.

变式 **证明**:在题图①中,连接 DE,因为 $BC\perp CD$,$CE=\sqrt{3}$,$CD=1$,所以 $DE=2$,则 $\sin\angle CDE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,又 $\angle CDE\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $\angle CDE=\dfrac{\pi}{3}$.因为 $DE=2$,$AE=AD=2$,所以 $\angle DEA=\dfrac{\pi}{3}$,故 $CD/\!/AE$.
在题图②中,因为 $CD/\!/AE$,$AE\subset$平面 ABE,$CD\not\subset$平面 ABE,所以 $CD/\!/$平面 ABE,因为 $CD\subset$平面 BCD,平面 $BCD\cap$平面 $ABE=l$,所以 $CD/\!/l$.

4.2 平面与平面平行

第 1 课时 平面与平面平行的性质

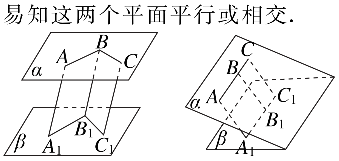
【课前预习】

知识点

平行 平行 线线平行

诊断分析

1. (1)√ (2)× (3)√ **【解析】**(2)因为两个平面平行,所以分别在两个平面内的两条直线无公共点,它们平行或异面.
2. **解**:如图所示,易知这两个平面平行或相交.



【课中探究】

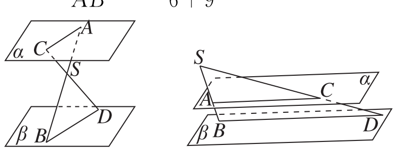
探究点一

例 1 **解**:直线 a 与 b 平行.证明如下.∵平面 $ABC/\!/$平面 $A'B'C'$,平面 $A'D'B\cap$平面 $ABC=a$,平面 $A'D'B\cap$平面 $A'B'C'=A'D'$,∴$A'D'/\!/a$.同理可得 $AD/\!/b$.
连接 DD',∵D 是 BC 的中点,D' 是 $B'C'$ 的中点,四边形 $BCC'B'$ 是平行四边形,∴$DD'/\!/BB'$,$DD'=BB'$,
又 $BB'/\!/AA'$,$BB'=AA'$,∴$DD'/\!/AA'$,$DD'=AA'$,
∴四边形 $AA'D'D$ 为平行四边形,∴$A'D'/\!/AD$,因此 $a/\!/b$.

变式 **证明**:因为平面 $ABC/\!/$平面 $DEFG$,平面 $ABED\cap$平面 $ABC=AB$,平面 $ABED\cap$平面 $DEFG=DE$,所以 $AB/\!/DE$.同理 $AD/\!/BE$.所以四边形 $ABED$ 为平行四边形.又 $AB\perp AD$,$AB=AD$,所以平行四边形 $ABED$ 是正方形.

探究点二

例 2 (1)4 (2)20 **【解析】**(1)当点 S 在平面 α,β 之间时,如图①所示,易知 A,B,C,D 四点共面,设为 γ,则 $\alpha\cap\gamma=AC$,$\beta\cap\gamma=BD$.因为 $\alpha/\!/\beta$,所以 $AC/\!/BD$,所以 $\dfrac{SA}{SB}=\dfrac{SC}{SD}$,即 $\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{SC}{CD}$,所以 $SC=\dfrac{SA\cdot CD}{AB}=\dfrac{6\times10}{6+9}=4$.



① ②

(2)当点 S 不在平面 α,β 之间时,如图②所示,同(1)知 $AC/\!/BD$,于是 $\dfrac{SA}{SB}=\dfrac{SC}{SD}$,即 $\dfrac{6}{9}=\dfrac{SC}{SC+10}$,解得 $SC=20$.

变式 **解**:因为 AA',BB' 相交于点 O,所以 AA',BB' 确定的平面与平面 α,平面 β 的交线分别为 AB,$A'B'$,
所以 $AB/\!/A'B'$,且 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{3}{2}$.
同理可得 $AC/\!/A'C'$,$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{3}{2}$;
$BC/\!/B'C'$,$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{3}{2}$.所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似,相似比为 $\dfrac{3}{2}$,可得 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{9}{4}$,
又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,
所以 $S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

第 2 课时 平面与平面平行的判定

【课前预习】

知识点

1. 两条相交直线 平行

诊断分析

1. (1)× (2)√ (3)× **【解析】**(1)错误,这两个平面可能平行,也可能相交.
(2)正确,由平面与平面平行的判定定理可知其正确.
(3)错误,这两个平面可能平行,也可能相交.
2. **解**:根据平面与平面平行的判定定理知,所选的两条直线必须相交,因为 $AB/\!/CD$,$BC/\!/AD$,所以不能同时选择的直线有 AB 和 CD,BC 和 AD.

【课中探究】

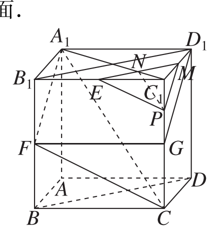
探究点一

探索 **解**:当平面与平面的交点个数为 0 时,才能保证平面与平面平行.

例 1 **证明**:连接 BC_1.因为 E,F,G,H 分别是棱 BC,CC_1,B_1C_1,BB_1 的中点,所以 $GH/\!/BC_1$,$EF/\!/BC_1$,所以 $GH/\!/EF$,又 $EF\subset$平面 AEF,$GH\not\subset$平面 AEF,所以 $GH/\!/$平面 AEF.在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,因为 G,E 分别为棱 B_1C_1,BC 的中点,所以 $A_1G/\!/AE$,
又 $AE\subset$平面 AEF,$A_1G\not\subset$平面 AEF,
所以 $A_1G/\!/$平面 AEF.又 $A_1G\cap GH=G$,且 $A_1G\subset$平面 A_1GH,$GH\subset$平面 A_1GH,所以平面 $A_1GH/\!/$平面 AEF.

变式 **证明**:因为 D,E,F 分别是棱 A_1C_1,BC,AC 的中点,且该几何体为直三棱柱,所以 $AB/\!/FE$,且 $DC_1/\!/AF$,$DC_1=AF$,所以四边形 AFC_1D 为平行四边形,所以 $AD/\!/FC_1$,又 $AD\not\subset$平面 FEC_1,$AB\not\subset$平面 FEC_1,$FC_1\subset$平面 FEC_1,$FE\subset$平面 FEC_1,所以 $AD/\!/$平面 FEC_1,$AB/\!/$平面 FEC_1.
又 $AB\cap AD=A$,所以平面 $ABD/\!/$平面 FEC_1.

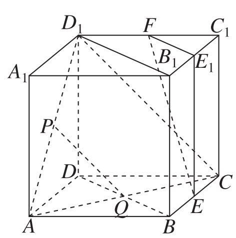
拓展 **解**:(1)证明:连接 BD,B_1D_1,EM,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,可得 $BB_1/\!/DD_1$ 且 $BB_1=DD_1$,所以四边形 BB_1D_1D 为平行四边形,所以 $BD/\!/B_1D_1$.因为 E 是 B_1C_1 的中点,M 是 C_1D_1 的中点,所以 $ME/\!/B_1D_1$,
所以 $BD/\!/ME$,所以 E,M,B,D 四点共面.
(2)取 C_1C 上靠近 C_1 的四等分点 P,连接 EP,PM,如图所示,则平面 EMP 满足题意,证明如下.
取 C_1C 的中点 G,连接 FG,D_1G,连接 A_1C_1,交 EM 于点 N,连接 NP,
显然 N 为 A_1C_1 上靠近点 C_1 的四等分点,又 P 为 C_1C 上靠近 C_1 的四等分点,



所以 $\dfrac{C_1N}{C_1A_1}=\dfrac{C_1P}{C_1C}=\dfrac{1}{4}$,所以 $A_1C/\!/NP$,
因为 $PN\not\subset$平面 A_1FC,$A_1C\subset$平面 A_1FC,所以 $PN/\!/$平面 A_1FC.依题意可得 $FG/\!/A_1D_1$ 且 $FG=A_1D_1$,所以四边形 A_1FGD_1 为平行四边形,所以 $A_1F/\!/GD_1$.
因为 P 为 C_1G 的中点,M 为 C_1D_1 的中点,所以 $PM/\!/GD_1$.
所以 $PM/\!/A_1F$,因为 $PM\not\subset$平面 A_1FC,$A_1F\subset$平面 A_1FC,所以 $PM/\!/$平面 A_1FC.又 $PN\cap PM=P$,$PN\subset$平面 EMP,$PM\subset$平面 EMP,所以平面 $EMP/\!/$平面 A_1FC.

探究点二

例 2 **证明**:(1)如图,连接 AC,CD_1.
因为四边形 $ABCD$ 是正方形,且 Q 是 BD 的中点,所以 Q 是 AC 的中点,
又 P 是 AD_1 的中点,
所以 $PQ/\!/CD_1$.
又 $PQ\not\subset$平面 DCC_1D_1,$CD_1\subset$平面 DCC_1D_1,所以 $PQ/\!/$平面 DCC_1D_1.
(2)取 B_1C_1 的中点 E_1,连接 EE_1,



FE_1，又 F，E 分别是 C_1D_1，BC 的中点，四边形 BCC_1B_1 为正方形，所以 $FE_1 /\!/ B_1D_1$，$EE_1 /\!/ BB_1$，
又 FE_1，$EE_1 \not\subset$ 平面 BB_1D_1D，B_1D_1，$BB_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D，所以 $FE_1 /\!/$ 平面 BB_1D_1D，$EE_1 /\!/$ 平面 BB_1D_1D。
因为 $FE_1 \cap EE_1 = E_1$，FE_1，$EE_1 \subset$ 平面 EE_1F，
所以平面 $EE_1F /\!/$ 平面 BB_1D_1D。
又 $EF \subset$ 平面 EE_1F，所以 $EF /\!/$ 平面 BB_1D_1D。

变式 **证明**：(1)连接 B_1D_1，因为 E，F 分别是 B_1C_1，C_1D_1 的中点，所以 $EF /\!/ B_1D_1$。因为 $DD_1 /\!/ BB_1$，$DD_1 = BB_1$，所以四边形 D_1B_1BD 是平行四边形，所以 $D_1B_1 /\!/ BD$。所以 $EF /\!/ BD$，则 EF，BD 确定一个平面，故 E，F，D，B 四点共面。
(2)因为 M，N 分别是 A_1B_1，A_1D_1 的中点，所以 $MN /\!/ D_1B_1 /\!/ EF$。又 $MN \not\subset$ 平面 $EFDB$，$EF \subset$ 平面 $EFDB$，所以 $MN /\!/$ 平面 $EFDB$。连接 NE，则 $NE /\!/ A_1B_1$，$NE = A_1B_1$，因为 $A_1B_1 /\!/ AB$，$A_1B_1 = AB$，所以 $NE /\!/ AB$，$NE = AB$，所以四边形 $NEBA$ 是平行四边形，则 $AN /\!/ BE$。又 $AN \not\subset$ 平面 $EFDB$，$BE \subset$ 平面 $EFDB$，所以 $AN /\!/$ 平面 $EFDB$。因为 AN，$MN \subset$ 平面 AMN，且 $AN \cap MN = N$，所以平面 $AMN /\!/$ 平面 $EFDB$。

§5 垂直关系

5.1 直线与平面垂直

第 1 课时 直线与平面垂直的性质

【课前预习】

知识点一

任何一条 $l \perp \alpha$ 垂线 垂面 垂足

诊断分析

1. (1)× (2)√
2. **解**：由直线与平面垂直的定义知，旗杆所在的直线与其影子所在的直线的夹角不变，始终为 90°。

知识点二

1. 垂直 平行 2. 平行 平面的距离

诊断分析

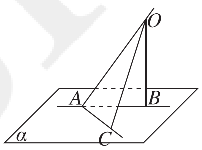
1. (1)√ (2)√ (3)√
2. **解**：不垂直。假设另一条直线也垂直于这个平面，则根据线面垂直的性质定理知，这两条直线互相平行，与这两条直线是异面直线矛盾，故另一条直线不垂直于这个平面。

知识点三

1. 相交 垂直 交点 A 垂线 2. 投影 直角 0° [0°,90°]

诊断分析

1. (1)× (2)× 【解析】(1)平面的一条斜线与平面的夹角的取值范围是(0°,90°)，任意一条直线与平面的夹角的取值范围才是[0°,90°]。
(2)平面的一条斜线与它在平面上的投影所成的锐角，叫作这条直线与这个平面的夹角。
2. **证明**：如图，斜线 AO 在平面 α 上的投影为 AB，$\theta(0° < \theta < 90°)$ 为斜线与平面 α 的夹角，$\theta_1(0° < \theta_1 \leqslant 90°)$ 为斜线与平面 α 内除 AB 外的任意一条直线 AC 的夹角。作 $OB \perp \alpha$，$OC \perp AC$，垂足分别为 B，C，则 $\sin\theta = \dfrac{OB}{OA}$，$\sin\theta_1 = \dfrac{OC}{OA}$。因为 $OB < OC$，所以 $\sin\theta < \sin\theta_1$，故 $\theta < \theta_1$。故平面的斜线与平面的夹角是这条斜线与这个平面内任意一条直线的夹角中最小的角。



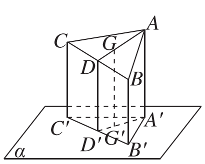
【课中探究】

探究点一

例 1 ③④ 【解析】当 l 与 α 内的一条直线垂直时，不能保证 l 与平面 α 垂直，故①不正确；当 l 与 α 不垂直时，l 可能与 α 内的无数条平行直线垂直，故②不正确，③正确；过一点有且只有一条直线垂直于已知平面，故④正确。故填③④。

探究点二

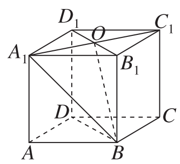
例 2 **证明**：如图，连接 AG 并延长交 BC 于点 D，连接 $A'G'$ 并延长交 $B'C'$ 于点 D'，连接 DD'，由 $AA' \perp \alpha$，$BB' \perp \alpha$，$CC' \perp \alpha$，得 $AA' /\!/ BB' /\!/ CC'$。
∵ D，D' 分别为 BC 和 $B'C'$ 的中点，
∴ $DD' /\!/ CC' /\!/ BB'$，∴ $DD' /\!/ AA'$。
∵ G，G' 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的重心，
∴ $\dfrac{AG}{GD} = \dfrac{A'G'}{G'D'}$，∴ $GG' /\!/ AA'$。



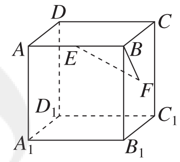
探究点三

探索 **解**：先求锐角的三角函数值再求角的大小。

例 3 **解**：(1)∵ $AB \perp$ 平面 AA_1D_1D，∴ $\angle AA_1B$ 就是 A_1B 与平面 AA_1D_1D 的夹角，
在 Rt$\triangle AA_1B$ 中，$\angle BAA_1 = 90°$，$AB = AA_1$，
∴ $\angle AA_1B = 45°$，∴ A_1B 与平面 AA_1D_1D 的夹角是 45°。
(2)设 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 O，连接 BO，如图。
∵ $A_1O \perp$ 平面 BB_1D_1D，
∴ $\angle A_1BO$ 就是 A_1B 与平面 BB_1D_1D 的夹角，设正方体的棱长为 1，
则 $A_1B = \sqrt{2}$，$A_1O = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$。又 $\angle A_1OB = 90°$，
∴ $\sin\angle A_1BO = \dfrac{A_1O}{A_1B} = \dfrac{1}{2}$，又 $0° \leqslant \angle A_1BO \leqslant 90°$，
∴ $\angle A_1BO = 30°$，∴ A_1B 与平面 BB_1D_1D 的夹角是 30°。



变式 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】如图，连接 BF，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $EB \perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $\angle EFB$ 即为 EF 与平面 BB_1C_1C 的夹角。设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $EB = 1$，$BF = \sqrt{2}$，在直角三角形 EFB 中，$\tan\angle EFB = \dfrac{EB}{BF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$。



第 2 课时 直线与平面垂直的判定

【课前预习】

知识点

两条相交直线 $a \cap b$

诊断分析

1. (1)× (2)× (3)√ (4)× (5)√ 【解析】(1)它们可以有公共点，也可以没有公共点。
(2)在线面垂直的判定定理中，要求平面内的两条直线必须相交。
(3)因为三角形的任意两条边都相交，所以根据直线与平面垂直的判定定理知，此直线与该三角形所在的平面垂直。
(4)直线 l 与平面 α 内的无数条直线垂直，当这无数条直线为一组平行直线时，不能推出 $l \perp \alpha$。
(5)若一条直线与一个平面内的所有直线都垂直，则必存在两条相交直线与这条直线垂直，则这条直线与这个平面垂直，正确。
2. **解**：当一条直线垂直于平行四边形的两条邻边时，此直线与该平行四边形所在的平面垂直；当一条直线垂直于平行四边形的两条对边时，因为这两条对边平行，所以此直线与该平行四边形所在的平面不一定垂直。

【课中探究】

探究点一

例 1 **证明**：在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$BB_1 \perp$ 平面 ABC，因为 $BC \subset$ 平面 ABC，所以 $BB_1 \perp BC$。
因为 $AB \perp BC$，$AB \subset$ 平面 A_1ABB_1，$BB_1 \subset$ 平面 A_1ABB_1，$BB_1 \cap AB = B$，所以 $BC \perp$ 平面 A_1ABB_1。
又 D，E 分别是 A_1B 和 A_1C 的中点，
所以 $DE /\!/ BC$，所以 $DE \perp$ 平面 A_1ABB_1。

变式 **证明**：由题意知，$AA_1 \perp$ 平面 ABC，又 $AC \subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1 \perp AC$。
因为 $\angle BAC = 90°$，所以 $AC \perp AB$，又 $AB \cap AA_1 = A$，$AB \subset$ 平面 A_1ABB_1，$AA_1 \subset$ 平面 A_1ABB_1，所以 $AC \perp$ 平面 A_1ABB_1，
又 $A_1D \subset$ 平面 A_1ABB_1，所以 $AC \perp A_1D$。
因为 D 为棱 BB_1 的中点，$AA_1 = 2a$，$AB = a$，且四边形 A_1ABB_1 为矩形，所以在 $\triangle A_1DA$ 中，$A_1D = \sqrt{2}a$，$AD = \sqrt{2}a$，则 $A_1D^2 + AD^2 = A_1A^2$，
所以 $\angle A_1DA = 90°$，即 $A_1D \perp AD$。
又 $AC \cap AD = A$，$AC \subset$ 平面 ADC，$AD \subset$ 平面 ADC，
故 $A_1D \perp$ 平面 ADC。

拓展 **证明**：∵ $BA = BC$，且 M 是棱 AC 的中点，∴ $BM \perp AC$。
∵ $CF \perp$ 平面 ABC，$BM \subset$ 平面 ABC，∴ $CF \perp BM$。
又 $CF \cap AC = C$，$CF \subset$ 平面 $ACFD$，$AC \subset$ 平面 $ACFD$，
∴ $BM \perp$ 平面 $ACFD$。∵ $DC \subset$ 平面 $ACFD$，∴ $CD \perp BM$①。

$\because CF\perp$平面 ABC,$AC\subset$平面 ABC,$\therefore AC\perp CF$,又 $DF\parallel AC$,$\therefore \angle CFD=\angle MCP=\dfrac{\pi}{2}$,

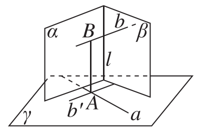
又$\dfrac{CF}{DF}=\dfrac{MC}{CP}$,$\therefore \triangle CFD\backsim\triangle MCP$,则$\angle PMC=\angle DCF$.

$\because \angle ACD+\angle FCD=\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore \angle PMC+\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore CD\perp PM$②. $\because BM\cap PM=M$,$BM\subset$平面 PBM,$PM\subset$平面 PBM,$\therefore$由①②知 $CD\perp$平面 PBM.

探究点二

例2 证明:因为 $AB=AC$,D 是 BC 的中点,所以 $AD\perp BC$.
因为在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$BB_1\perp$平面 ABC,$AD\subset$平面 ABC,所以 $AD\perp BB_1$.
又 $BC\cap BB_1=B$,所以 $AD\perp$平面 BB_1C_1C.
由点 E 在棱 BB_1 上运动,得 $C_1E\subset$平面 BB_1C_1C,
所以 $AD\perp C_1E$.

变式 证明:如图所示,过点 A 作 $b'\parallel b$,则 a,b'可确定一个平面,记该平面为 γ.



$\because AB$ 是异面直线 a,b 的公垂线,
$\therefore AB\perp a$,$AB\perp b$,$\therefore AB\perp b'$.
又 $a\cap b'=A$,$\therefore AB\perp\gamma$.
$\because a\perp\alpha$,$b\perp\beta$,$l\subset\alpha$,$l\subset\beta$,$\therefore l\perp a$,$l\perp b$,$\therefore l\perp b'$,
又 $a\cap b'=A$,$\therefore l\perp\gamma$,$\therefore AB\parallel l$.

5.2 平面与平面垂直

【课前预习】

知识点一

1. 半平面 2. 两个半平面 棱 面 $\alpha\text{-}AB\text{-}\beta$ $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$

诊断分析

1. (1)× (2)× (3)√
2. **解:**不是,二面角是从一条直线出发的两个半平面所组成的图形,两个平面相交能形成四个二面角.

知识点二

1. 垂直于 平面角 直角 2. 直二面角

诊断分析

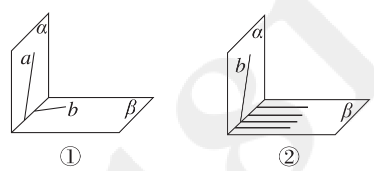
解:这两条垂线的夹角不一定为二面角的平面角,它与二面角的平面角的大小相等或互补.

知识点三

交线 垂直 $a\subset\alpha$ $a\perp l$ 线面

诊断分析

(1)× (2)√ (3)× **【解析】**(1)满足条件的两条直线不一定垂直,如图①,平面 $\alpha\perp$平面 β,$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,但 a,b 不垂直.



① ②

(2)如图②,平面 β 内存在无数条垂直于这两个平面交线的直线,这些直线都与直线 b 垂直.
(3)因为直线 b 不一定在平面 α 内,所以直线 b 不一定垂直于平面 β.

知识点四

垂线

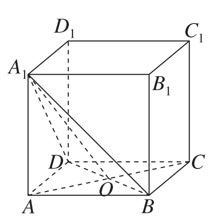
诊断分析

1. (1)× (2)× (3)√
2. **解:**根据平面与平面垂直的定义与判定定理,易知过平面 α 的一条垂线可作无数个平面与平面 α 垂直;过平面 α 的一条斜线可作一个平面与平面 α 垂直;过平面 α 的一条平行线可作一个平面与平面 α 垂直.

【课中探究】

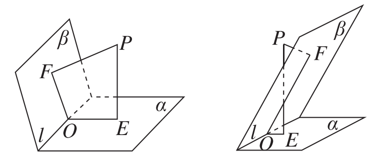
探究点一

例1 (1)C (2)C **【解析】**(1)如图,连接 AC,与 BD 交于点 O,连接 A_1O.



$\because BD\perp AC$,$BD\perp AA_1$,$AC\cap AA_1=A$,$\therefore BD\perp$平面 AA_1O,又 $A_1O\subset$平面 AA_1O,$\therefore BD\perp A_1O$,$\therefore \angle A_1OA$ 为二面角 $A_1\text{-}BD\text{-}A$ 的平面角.设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,则 $AA_1=a$,$AO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1OA$ 中,$\tan\angle A_1OA=\dfrac{A_1A}{AO}=\sqrt{2}$,即二面角 $A_1\text{-}BD\text{-}A$ 的正切值为$\sqrt{2}$,故选 C.

(2)设过 PE,PF 的平面 γ 与二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的棱交于点 O,连接 OE,OF.当点 P 在二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 内时,如图①,因为 $PE\perp\alpha$,$PF\perp\beta$,所以 $PE\perp l$,$PF\perp l$,又 $PE\cap PF=P$,所以 $l\perp\gamma$,所以 $l\perp OE$,$l\perp OF$,则$\angle EOF$ 为二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角,且它与$\angle EPF$ 互补.同理,当点 P 在二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 外时,如图②,此时$\angle EOF$ 为二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角,且它与$\angle EPF$ 相等.因为$\angle EPF=60^\circ$,所以二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角的大小为 60°或 120°,故选 C.



① ②

变式 解:(1)证明:因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,$CB\subset$平面 $ABCD$,所以 $PD\perp CB$.由已知得 $AB\perp AD$,则 $BD=\sqrt{2}$,又易知 $BC=\sqrt{1^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$,且 $CD=2$,
所以 $BD^2+BC^2=CD^2$,即 $CB\perp BD$.
又 $PD\cap BD=D$,$PD\subset$平面 PBD,$BD\subset$平面 PBD,
所以 $CB\perp$平面 PBD.
(2)因为 $CB\perp$平面 PBD,$PB\subset$平面 PBD,所以 $CB\perp PB$,
又 $PD\perp$平面 $ABCD$,所以$\angle PBD$ 为二面角 $P\text{-}BC\text{-}D$ 的平面角.
因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,所以$\angle PCD$ 为 PC 与底面 $ABCD$ 的夹角,由 $\tan\theta=\tan\angle PCD=\dfrac{PD}{CD}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,得 $PD=\sqrt{6}$.
因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $PD\perp BD$,
在 $\mathrm{Rt}\triangle PDB$ 中,$\tan\angle PBD=\dfrac{PD}{BD}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,则$\angle PBD=60^\circ$,所以二面角 $P\text{-}BC\text{-}D$ 的大小为 60°.

探究点二

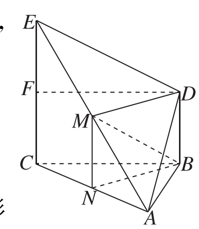
例2 证明:取 A_1C 的中点 E,连接 AE.因为 $AA_1=AC$,所以 $AE\perp A_1C$.又平面 $A_1BC\perp$平面 A_1ACC_1,平面 $A_1BC\cap$平面 $A_1ACC_1=A_1C$,$AE\subset$平面 A_1ACC_1,所以 $AE\perp$平面 A_1BC.
因为 $BC\subset$平面 A_1BC,所以 $AE\perp BC$.
在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AA_1\perp$平面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,所以 $AA_1\perp BC$.因为 $AA_1\cap AE=A$,$AA_1\subset$平面 A_1ACC_1,$AE\subset$平面 A_1ACC_1,所以 $BC\perp$平面 A_1ACC_1.

变式 证明:$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形,$AB=2BC$,E 为 CD 的中点,$\therefore \triangle ADE$,$\triangle BCE$ 都是等腰直角三角形,
$\therefore \angle AED=\angle BEC=45^\circ$,$\therefore \angle AEB=90^\circ$,即 $AE\perp EB$.
$\because$平面 $BEC'\perp$平面 $ABED$,平面 $BEC'\cap$平面 $ABED=BE$,$AE\subset$平面 $ABED$,$\therefore AE\perp$平面 BEC',又 $BC'\subset$平面 BEC',$\therefore AE\perp BC'$.

探究点三

例3 证明:因为$\triangle ABC$ 为等边三角形,O 为$\triangle ABC$ 外接圆圆心,所以 O 是$\triangle ABC$ 的中心,且 $AO\perp BC$.
易知 $PO\perp$平面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,所以 $PO\perp BC$,
又 $PO\cap AO=O$,$PO\subset$平面 POA,$AO\subset$平面 POA,
所以 $BC\perp$平面 POA,又 $BC\subset$平面 PBC,
所以平面 $POA\perp$平面 PBC.

变式 证明:(1)如图所示,取 EC 的中点 F,连接 DF.



$\because EC\perp$平面 ABC,$BD\parallel CE$,
$\therefore DB\perp$平面 ABC.
$\because AB\subset$平面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,
$\therefore DB\perp AB$,$EC\perp BC$.
$\because BD\parallel CE$,$BD=\dfrac{1}{2}CE=FC$,$\therefore$四边形 $FCBD$ 是矩形,$\therefore DF\perp EC$.又 $AB=BC=DF$,$BD=FE$,
$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DEF\cong\mathrm{Rt}\triangle ADB$,$\therefore DE=AD$.
(2)如图所示,取 AC 的中点 N,连接 MN,NB,
$\because M$ 是 EA 的中点,$\therefore MN\parallel EC$,且 $MN=\dfrac{1}{2}EC$.

由 $BD \parallel EC$，$BD=\frac{1}{2}EC$，且 $BD\perp$ 平面 ABC，可得四边形 $MNBD$ 是矩形，于是 $DM\perp MN$.
$\because DE=AD$，M 是 EA 的中点，$\therefore DM\perp EA$.
又 $EA\cap MN=M$，$EA\subset$ 平面 ECA，$MN\subset$ 平面 ECA，
$\therefore DM\perp$ 平面 ECA，
又 $DM\subset$ 平面 BDM，$\therefore$ 平面 $ECA\perp$ 平面 BDM.

拓展 **证明**：设 AB 的中点为 M，连接 DM，
由题可知 $BM\parallel CD$ 且 $BM=CD=BC$，$\angle ABC=90°$，所以四边形 $BCDM$ 是正方形，所以 $DM=AM=MB=1$. 在 $\triangle ADB$ 中，$DM=\frac{1}{2}AB$，所以 $\angle ADB=90°$，所以 $DB\perp AD$.
因为平面 $APD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $APD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$DB\subset$ 平面 $ABCD$，
所以 $BD\perp$ 平面 APD，又 $PA\subset$ 平面 APD，所以 $BD\perp PA$.
因为 $PA\perp PD$，$PD\cap BD=D$，$PD\subset$ 平面 PBD，$BD\subset$ 平面 PBD，所以 $PA\perp$ 平面 PBD.
又 $PA\subset$ 平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBD.

探究点四

例 4 **证明**：在矩形 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$.
因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD，
又 $AF\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AF$.
因为 $PA=AD$，F 是 PD 的中点，所以 $AF\perp PD$.
又 $PD\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，$PD\cap CD=D$，
所以 $AF\perp$ 平面 PCD.

变式 **证明**：(1)在菱形 $ABCD$ 中，连接 BD，
$\because \angle DAB=60°$，$\therefore \triangle ABD$ 为正三角形，
$\because G$ 是 AD 的中点，$\therefore BG\perp AD$.
$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$BG\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BG\perp$ 平面 PAD.
(2)连接 PG，$\because \triangle PAD$ 是正三角形，G 是 AD 的中点，
$\therefore PG\perp AD$. 由(1)知 $BG\perp AD$.
又 $\because PG\cap BG=G$，$\therefore AD\perp$ 平面 PBG.
$\because PB\subset$ 平面 PBG，$\therefore AD\perp PB$.

拓展 **证明**：(1)在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，M 为 CD 的中点，
$\therefore$ 在四棱锥 $D\text{-}ABCM$ 中，$AD=DM$，
又 O 是 AM 的中点，$\therefore DO\perp AM$.
$\because$ 平面 $ADM\perp$ 平面 $ABCM$，平面 $ADM\cap$ 平面 $ABCM=AM$，$DO\subset$ 平面 ADM，$\therefore DO\perp$ 平面 $ABCM$，
又 $DO\subset$ 平面 BDO，$\therefore$ 平面 $BDO\perp$ 平面 $ABCM$.
(2)在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，M 为 CD 的中点，
$\therefore$ 在四棱锥 $D\text{-}ABCM$ 中，$AM=BM=\sqrt{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，则 $AM^2+BM^2=AB^2$，$\therefore AM\perp BM$.
由(1)知，$DO\perp$ 平面 $ABCM$，
又 $BM\subset$ 平面 $ABCM$，$\therefore DO\perp BM$.
$\because DO\cap AM=O$，$DO\subset$ 平面 ADM，$AM\subset$ 平面 ADM，
$\therefore BM\perp$ 平面 ADM.
又 $AD\subset$ 平面 ADM，$\therefore AD\perp BM$.

§6 简单几何体的再认识

6.1 柱、锥、台的侧面展开与面积

【课前预习】

知识点一

1. 一条侧棱　母线　2. $2\pi rl$　πrl　$\pi(r_1+r_2)l$

诊断分析

(1)×　(2)×　(3)×　**[解析]** (1)圆柱的侧面积等于底面圆周长与高的积.
(2)当圆锥的底面半径扩大为原来的 2 倍，母线长缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ 时，它的底面积扩大为原来的 4 倍，而侧面积不变，所以它的表面积发生了变化.
(3)圆柱、圆台的表面积为侧面展开图的面积加上上底面与下底面的面积，圆锥的表面积为侧面展开图的面积加上底面圆的面积.

知识点二

ch　$\frac{1}{2}ch'$　$\frac{1}{2}(c_1+c_2)h'$

诊断分析

(1)×　(2)√　(3)×　**[解析]** (1)五棱锥的表面积等于五个侧面面积与一个底面面积之和.
(3)设原来正方体的棱长为 x cm，则 $6(x+1)^2=4\times 6x^2$，可得 $x=1$，所以扩大后的正方体的棱长为 2 cm.

【课中探究】

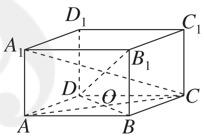
探究点一

例 1 (1)C　(2)A　**[解析]** (1)设圆锥底面半径为 r，则圆锥的高 $h=2r$，$\therefore$ 其母线长 $l=\sqrt{5}r$，$\therefore S_{侧}=\pi rl=\sqrt{5}\pi r^2$，又 $S_{底}=\pi r^2$，$\therefore S_{底}:S_{侧}=1:\sqrt{5}$.
(2)设圆台较小底面的半径为 r，则另一底面的半径为 $3r$. 由 $S_{侧}=3\pi(r+3r)=84\pi$，解得 $r=7$.

变式 C　**[解析]** 设圆柱底面的半径为 r，则圆柱的高 $h=2r$，故圆柱的侧面积为 $2\pi r\cdot h=4\pi r^2$，表面积为 $4\pi r^2+2\pi r^2=6\pi r^2$，所以该圆柱的侧面积与表面积的比值为 $\frac{4\pi r^2}{6\pi r^2}=\frac{2}{3}$，故选 C.

探究点二

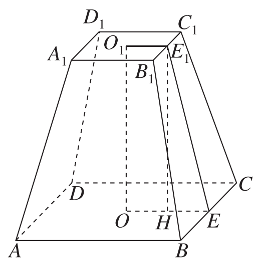
例 2 **解**：如图，在直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=5$，取 $A_1C=15$，$B_1D=9$，连接 AC，BD，设 $AC=a$，$BD=b$，AC 和 BD 交于点 O.



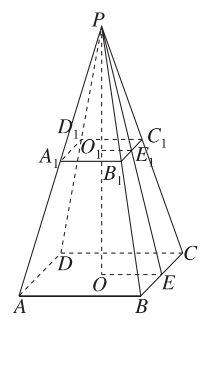
$\because A_1C=15$，$B_1D=9$，
$\therefore a^2+5^2=15^2$，$b^2+5^2=9^2$，
$\therefore a^2=200$，$b^2=56$，
即 $AC=10\sqrt{2}$，$BD=2\sqrt{14}$.
$\because$ 该直四棱柱的底面是菱形，
$\therefore AB^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{200+56}{4}=64$，
$\therefore AB=8$，$\therefore$ 直四棱柱的侧面积 $S_{侧}=4\times 8\times 5=160$.
又直四棱柱的底面积 $S_{底}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=20\sqrt{7}$，
$\therefore$ 直四棱柱的表面积 $S_{表}=160+2\times 20\sqrt{7}=160+40\sqrt{7}$.

变式 $2:1$　**[解析]** 设该正四棱锥的斜高为 h'，高为 h，底面边长为 a，则 $h'=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$，$a=2\sqrt{h'^2-h^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$. 可得该正四棱锥的侧面积 $S_1=\frac{1}{2}\times 4a\times h'=\frac{8}{3}h^2$，底面积 $S_2=a^2=\frac{4}{3}h^2$，所以该正四棱锥的侧面积与底面积之比为 $2:1$.

拓展 $108\sqrt{17}+180$　**[解析]** 方法一：如图，设 E，E_1 分别是 BC，B_1C_1 的中点，O，O_1 分别是四棱台下、上底面的中心，连接 O_1O，O_1E_1，E_1E，OE，则 O_1O 为正四棱台的高，即 $O_1O=12$，$OE=\frac{1}{2}AB=6$，$O_1E_1=\frac{1}{2}A_1B_1=3$. 过 E_1 作 $E_1H\perp OE$，垂足为 H，则 $E_1H=O_1O=12$，$OH=O_1E_1=3$，$HE=OE-O_1E_1=6-3=3$. 在 $\text{Rt}\triangle E_1HE$ 中，$E_1E^2=E_1H^2+HE^2=12^2+3^2=153$，所以 $E_1E=3\sqrt{17}$，所以 $S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times(B_1C_1+BC)\times E_1E=2\times(6+12)\times 3\sqrt{17}=108\sqrt{17}$，所以 $S_{表}=108\sqrt{17}+6^2+12^2=108\sqrt{17}+180$.



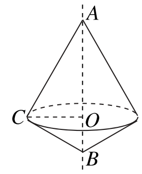
方法二：如图，将正四棱台的侧棱延长，设交于一点 P. 取 B_1C_1，BC 的中点分别为 E_1，E，连接 EE_1 并延长，则点 P 在 EE_1 的延长线上. 设 O_1，O 分别是四棱台上、下底面的中心. 连接 OE，O_1E_1，连接 OO_1 并延长，则点 P 在 OO_1 的延长线上. 因为 $O_1E_1=\frac{1}{2}A_1B_1=3$，$OE=\frac{1}{2}AB=6$，所以 $\frac{PO_1}{PO}=\frac{O_1E_1}{OE}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，则 $\frac{PO_1}{PO_1+O_1O}=\frac{1}{2}$，所以 $PO_1=O_1O=12$. 在 $\text{Rt}\triangle PO_1E_1$



中，$PE_1^2=PO_1^2+O_1E_1^2=12^2+3^2=153$，即 $PE_1=3\sqrt{17}$，在 Rt△POE 中，$PE^2=PO^2+OE^2=24^2+6^2=612$，即 $PE=6\sqrt{17}$，所以 $E_1E=PE-PE_1=6\sqrt{17}-3\sqrt{17}=3\sqrt{17}$．故 $S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times(BC+B_1C_1)\times E_1E=2\times(12+6)\times3\sqrt{17}=108\sqrt{17}$，所以 $S_{表}=108\sqrt{17}+6^2+12^2=108\sqrt{17}+180$.

探究点三

例 3　解：所得旋转体如图所示，它由两个同底的圆锥组成，



设底面圆的圆心为 O，连接 OC.

当$\angle BAC=30°$时，$\because AB=2$，$\therefore CB=1$，$CA=\sqrt{3}$，$\therefore CO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，旋转体的表面积 $S_1=\pi\times CO\times(AC+BC)=\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(1+\sqrt{3})=\frac{\pi}{2}(3+\sqrt{3})$；

当$\angle BAC=45°$时，$\because AB=2$，$\therefore AC=BC=\sqrt{2}$，$\therefore CO=1$，旋转体的表面积 $S_2=\pi\times CO\times(AC+BC)=\pi\times1\times(\sqrt{2}+\sqrt{2})=2\sqrt{2}\pi$. 故 $S_2>S_1$.

变式　解：由题意，知原圆柱的表面积 $S_1=2\pi\cdot2a\cdot\sqrt{3}a+2\pi\cdot(2a)^2=4(\sqrt{3}+2)\pi a^2$，挖去一个小圆柱后所得几何体的表面积 $S_2=S_1-2\pi a^2+2\pi a\cdot\sqrt{3}a=6(\sqrt{3}+1)\pi a^2$，所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4(\sqrt{3}+2)\pi a^2}{6(\sqrt{3}+1)\pi a^2}=\frac{1+\sqrt{3}}{3}$.

6.2　柱、锥、台的体积

【课前预习】

知识点

Sh　πr^2h　$\frac{1}{3}Sh$

诊断分析

1. (1)×　(2)√　(3)√　(4)×　(5)×　(6)√

[解析] (1)记一个圆柱的底面半径为 2，高为 9，体积为 V_1，表面积为 S_1，另一个圆柱的底面半径为 3，高为 4，体积为 V_2，表面积为 S_2，则 $V_1=\pi\times2^2\times9=36\pi$，$V_2=\pi\times3^2\times4=36\pi$，所以 $V_1=V_2$，但 $S_1=2\pi\times2^2+2\pi\times2\times9=44\pi$，$S_2=2\pi\times3^2+2\pi\times3\times4=42\pi$，即 $S_1\neq S_2$.

(4)由圆柱的体积公式知，圆柱的体积由底面半径与高确定，因此底面积越大，它的体积不一定越大.

(5)由圆锥的体积公式知圆锥的底面半径扩大为原来的 2 倍，高缩小为原来的$\frac{1}{2}$，它的体积变为原来体积的 2 倍.

2. **解：**当棱台的上底面按同一比例缩小，且使上底面缩为一点时，棱台的体积公式变为棱锥的体积公式；

当棱台的上底面按同一比例增大，且使上底面与下底面全等时，棱台的体积公式变为棱柱的体积公式. 由此可知棱柱、棱锥的体积公式是棱台的体积公式的特殊情况.

【课中探究】

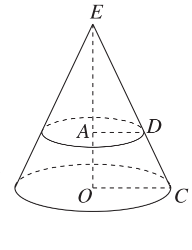
探究点一

例 1　(1)B　(2)$10\pi+3\sqrt{3}$　**[解析]** (1)设圆锥的底面半径为 R，则高为 $2R$，母线长 $l=\sqrt{(2R)^2+R^2}=\sqrt{5}R$. 圆锥的侧面积 $S=\pi Rl=\sqrt{5}\pi R^2=\sqrt{5}\pi$，所以 $R=1$，所以圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi R^2\cdot2R=\frac{2}{3}\pi$，故选 B.

(2)因为弦 AB 所对的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，所以剩余部分的底面积为$\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{3}\times2^2+\frac{1}{2}\times2^2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}+\sqrt{3}$，所以剩余部分的体积为$\left(\frac{10\pi}{3}+\sqrt{3}\right)\times3=10\pi+3\sqrt{3}$.

变式　(1)C　(2)B　**[解析]** (1)因为正四棱锥的侧棱长为$\sqrt{5}$，底面边长为 2，所以底面面积为 $2^2=4$，正四棱锥的高为 $\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，由棱锥的体积公式可得该正四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times4\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

(2)设截面圆的半径为 r，如图，由$\frac{AD}{OC}=\frac{EA}{EO}$可得$\frac{r}{3}=\frac{6-2}{6}$，解得 $r=2$，所以截面圆的面积 $S_1=4\pi$，原圆锥的底面圆的面积 $S_2=9\pi$，所以圆台的体积 $V=\frac{2}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})=\frac{2}{3}\times(4\pi+9\pi+\sqrt{36\pi^2})=\frac{38}{3}\pi$. 故选 B.



拓展　解：(1)设 OA 与圆 P 相切于点 E，连接 EP，设圆台上、下底面的半径分别为 r'，r，则 $2\pi r=\frac{\pi}{3}\times72$，解得 $r=12$.

在 Rt△OEP 中，由$\angle EOP=\frac{\pi}{6}$，$PE=r$，可得 $OP=2r$，

$\therefore OD=3r=36$，$\therefore AD=OA-OD=36$.

(2) $\because 2\pi r'=\frac{\pi}{3}\times36$，$\therefore r'=6$，则圆台的高 $h=\sqrt{AD^2-(r-r')^2}=\sqrt{36^2-6^2}=6\sqrt{35}$，$\therefore V=\frac{1}{3}\pi(r'^2+r'r+r^2)h=\frac{1}{3}\pi\times(6^2+6\times12+12^2)\times6\sqrt{35}=504\sqrt{35}\pi$.

探究点二

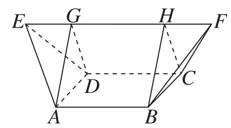
例 2　解：由 $PO_1=2$ m，知 $O_1O=4PO_1=8$ m.

因为 $A_1B_1=AB=6$ m，所以正四棱锥 $P\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V_{锥体}=\frac{1}{3}\times6^2\times2=24(\text{m}^3)$.

正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V_{柱体}=6^2\times8=288(\text{m}^3)$，所以仓库的体积 $V=V_{锥体}+V_{柱体}=24+288=312(\text{m}^3)$.

变式　A　**[解析]** 由题图可知，组合体的体积 $V=\pi\times4\times\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-1^2\right]+3\times3\times3-\pi\times3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(27-\frac{7\pi}{4}\right)\text{cm}^3$，故选 A.

拓展　$\frac{\sqrt{2}}{3}$　**[解析]** 如图，过 A，B 作 EF 的垂线，垂足分别为 G，H，连接 DG，CH，易得 $EG=HF=\frac{1}{2}$. $\because$ △ADE，△BCF 均为正三角形，$\therefore AE=DE=BF=CF=1$，$\therefore AG=GD=BH=HC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$△$AGD$ 和△BHC 为等腰三角形，且底边上的高为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore S_{\triangle AGD}=S_{\triangle BHC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1=\frac{\sqrt{2}}{4}$. $\therefore$该多面体的体积 $V=V_{三棱锥E\text{-}ADG}+V_{三棱锥F\text{-}BHC}+V_{三棱柱AGD\text{-}BHC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\times1=\frac{\sqrt{2}}{3}$.



6.3　球的表面积和体积

第 1 课时　球的表面积和体积

【课前预习】

知识点一

$4\pi R^2$

诊断分析

×　**[解析]** 球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，表面积 $S=4\pi R^2$，所以$\frac{V}{S}=\frac{R}{3}$.

知识点二

1. (1)大圆　小圆
2. (1)唯一交点　切点　(2)相等　圆　圆锥

诊断分析

(1)√　(2)×　**[解析]** (2)$S_{球面}=4\pi R^2=4S_{大圆}$.

【课中探究】

探究点一

例 1　(1)D　(2)4∶9　**[解析]** (1)设球的半径为 R，则由题意可知 $4\pi R^2=16\pi$，故 $R=2$. 所以球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$.

(2)设两个球的半径分别为 r_1,r_2,表面积分别为 S_1,S_2,则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{4}{9}$.

(3)**解**:设球的半径为 R,则 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500}{3}\pi$,解得 $R=5$,

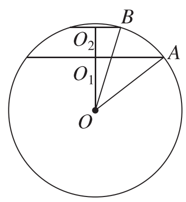
所以球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times5^2=100\pi$.

变式 (1)B (2)D **[解析]** (1)设两个球的半径分别为 r_1,r_2,由两个球的体积之比为 8∶27,得 $\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}=\frac{8}{27}$,即 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$,则这两个球的表面积的比值为 $\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2}=\frac{4}{9}$,故选 B.

(2)由大金属球的直径为 6 cm,可得其半径为 3 cm,所以 $V_{大球}=\frac{4}{3}\times\pi\times3^3=36\pi$.由小金属球的直径为 2 cm,可得其半径为 1 cm,所以 $V_{小球}=\frac{4}{3}\times\pi\times1^3=\frac{4}{3}\pi$.故可铸成这样的小球的个数 $n=\frac{V_{大球}}{V_{小球}}=\frac{36\pi}{\frac{4\pi}{3}}=27$,故选 D.

探究点二

例 2 **解**:(1)当截面在球心的同侧时,如图所示为球的轴截面,O_1,O_2 为两截面圆的圆心,$AO_1/\!/BO_2$,易知 O,O_1,O_2 三点共线,连接 OO_2,OA,OB,



则 $OO_1\perp AO_1$,$OO_2\perp BO_2$.

设球的半径为 R cm,

$\because\pi\cdot O_2B^2=49\pi$,$\therefore O_2B=7$ cm.

同理,得 $O_1A=20$ cm.

设 $OO_1=x$ cm,则 $OO_2=(x+9)$cm.

在 Rt△O_1OA 中,$R^2=x^2+20^2$①,

在 Rt△OO_2B 中,$R^2=7^2+(x+9)^2$②,

联立①②可得 $x=15$,$R=25$.

∴球的表面积 $S_{球}=4\pi R^2=2500\pi(\mathrm{cm}^2)$.

(2)当截面在球心的两侧时,O_1,O_2 分别为两截面圆的圆心,$O_1A/\!/O_2B$,易知 O,O_1,O_2 三点共线,连接 O_1O_2,OA,OB,则 $OO_1\perp O_1A$,$OO_2\perp O_2B$.

设球的半径为 R cm,$\because\pi\cdot O_2B^2=49\pi$,$\therefore O_2B=7$ cm.

$\because\pi\cdot O_1A^2=400\pi$,$\therefore O_1A=20$ cm.

设 $O_1O=x$ cm,则 $OO_2=(9-x)$cm.

在 Rt△OO_1A 中,$R^2=x^2+400$,

在 Rt△OO_2B 中,$R^2=(9-x)^2+49$,$\therefore x^2+400=(9-x)^2+49$,解得 $x=-15$,不合题意,舍去.

综上所述,球的表面积为 2500π cm^2.

变式 C **[解析]** 由题意知截面圆的半径为 $\sqrt{2}$,因为球心到截面的距离为 1,所以球的半径为 $\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$,所以球的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}\pi$.故选 C.

第 2 课时 空间几何体与球的切接问题

【课前预习】

知识点

诊断分析

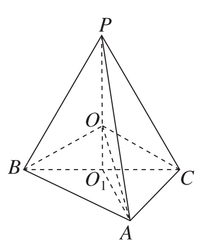
(1)× (2)√ (3)× **[解析]** (1)任何长方体都有外接球,当长方体的长、宽、高都相等,即为正方体时,也有内切球.

(3)圆锥的内切球与其侧面相切于一个圆.

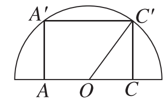
【课中探究】

探究点一

例 1 (1)D **[解析]** 如图,设 O_1 是 BC 的中点,连接 O_1A,O_1P,因为 $\angle BAC=90°$,所以 O_1 是△ABC 的外心,$O_1A=O_1B=O_1C$.因为 $PA=PB=PC=BC=2$,O_1 是 BC 的中点,所以 $PO_1\perp BC$,$PO_1=\sqrt{3}$,$O_1A=1$,则 $PO_1^2+O_1A^2=PA^2$,则 $PO_1\perp O_1A$.又 $O_1A\cap BC=O_1$,O_1A,$BC\subset$平面 ABC,所以 $PO_1\perp$平面 ABC,又 $PO_1\subset$平面 PBC,所以平面 $PBC\perp$平面 ABC.由于△PBC 是等边三角形,设 O 是△PBC 的外心,则 O 在 PO_1 上,连接 OB,OC,OA,则 $OP=OB=OC=OA$,则 O 是三棱锥 P-ABC 外接球的球心.设外接球的半径为 r,根据等边三角形的性质可知 $r=OP=\frac{2}{3}O_1P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以外接球的表面积为 $4\pi r^2=4\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{16}{3}\pi$.故选 D.



(2)**解**:过半球球心作正方体对角面的截面,如图所示,设半球的半径为 R,正方体的棱长为 a,则 $CC'=a$,$OC=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.



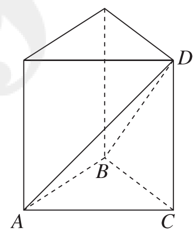
连接 OC',在 Rt△$C'CO$ 中,$CC'^2+OC^2=OC'^2$,

即 $a^2+\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2=R^2$,得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

所以 $V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3$,$V_{正方体}=a^3$,

因此 $V_{半球}$∶$V_{正方体}=\frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3$∶$a^3=\sqrt{6}\pi$∶2.

变式 (1)A (2)A **[解析]** (1)因为平面 $ABC\perp$平面 BCD,$AB=BC=AC=CD=2$,$BC\perp CD$,所以可将四面体 $ABCD$ 看作底面是等边三角形的直三棱柱的一部分,如图所示,则四面体 $ABCD$ 的外接球即为直三棱柱的外接球.因为底面三角形 ABC 的外心到三角形 ABC 的顶点的距离为 $\frac{2}{3}\times\sqrt{2^2-1^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以直三棱柱的外接球的半径 $r=\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$,则球 O 的表面积 $S=4\pi r^2=4\pi\times\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=\frac{28\pi}{3}$,故选 A.

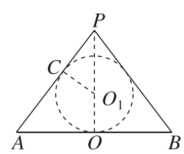


(2)由题意,设球的球心为 O,半径为 R,正三棱台的上、下底面分别为△$A_1B_1C_1$,△$A_2B_2C_2$,A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 均为正三棱台的棱,则△$A_1B_1C_1$,△$A_2B_2C_2$ 都是等边三角形.设△$A_1B_1C_1$,△$A_2B_2C_2$ 的外接圆圆心分别为 O_1,O_2,连接 O_1O_2,则 $O_1O_2=1$.连接 O_1A_1,O_2A_2,∵等边三角形 $A_1B_1C_1$ 和等边三角形 $A_2B_2C_2$ 的边长分别为 $3\sqrt{3}$,$4\sqrt{3}$,$\therefore O_1A_1=3$,$O_2A_2=4$.连接 OA_1,OA_2,若点 O 在线段 O_1O_2 上,则 $R^2=O_1A_1^2+OO_1^2=O_2A_2^2+(1-OO_1)^2$,即 $3^2+OO_1^2=4^2+(1-OO_1)^2$,可得 $OO_1=4>O_1O_2$,矛盾,故点 O 在线段 O_1O_2 的延长线上.由题意得 $R^2=O_1A_1^2+(OO_2+1)^2=O_2A_2^2+OO_2^2$,可得 $OO_2=3$,$R=5$,∴该球的表面积 $S=4\pi R^2=100\pi$.

探究点二

例 2 $\frac{3}{2}$ **[解析]** 设球 O 的半径为 r,则圆柱的底面半径为 r,高为 $2r$,所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi r^2\cdot2r}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3}{2}$.

变式 $\frac{9\pi}{2}$ **[解析]** 如图所示,设圆锥底面圆的圆心为 O,一条直径为 AB,圆锥的顶点为 P,连接 PO,则圆锥 PO 的一个轴截面为等腰三角形 PAB.设该圆锥内能放置的半径最大的球的球心为 O_1,易知球 O_1 的一个轴截面是△PAB 的内切圆,设球 O_1 与 PA 切于点 C,连接 O_1C.由题意知 $AO=3$,$PA=5$,则 $PO=4$,设球 O_1 的半径为 R,由 Rt△PO_1C∽Rt△PAO 得 $\frac{O_1C}{AO}=\frac{PO_1}{PA}$,即 $\frac{R}{3}=\frac{4-R}{5}$,解得 $R=\frac{3}{2}$,所以球 O_1 的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9\pi}{2}$.



本章总结提升

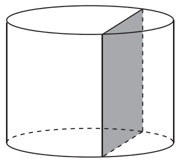
【知识辨析】

1. × **2.** × **3.** √ **4.** × **5.** × **6.** √ **7.** × **8.** × **9.** √ **10.** √

【素养提升】

题型一

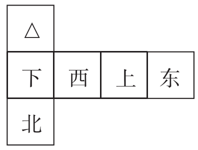
例 1 (1)AB (2)C **[解析]** (1)对于 A,圆柱的底面是圆面,故 A 正确;对于 B,如图所示,经过圆柱任意两条母线的截面是一个矩形面,故 B 正确;对于 C,圆台的母线延长后相交于一点,故 C 错误;对于 D,圆柱夹在两个平行于底面的截面间的几何体才是旋转体,故 D 错误. 故选 AB.



(2)由平面 DEE_1D_1 // 平面 ABB_1A_1,可知平面 DEE_1D_1 与三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的各个侧棱都平行,又三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的上、下底面平行且全等,所以可得 $\triangle CDE$ 与 $\triangle C_1D_1E_1$ 是全等三角形,四边形 $ABED$ 和四边形 $A_1B_1E_1D_1$ 是全等的四边形,则根据棱柱的定义可知Ⅰ,Ⅱ都是棱柱. 故选 C.

变式 (1)AD (2)A **[解析]** (1)由于 AB 始终在地面上,因此倾斜过程中没有水的部分是以左、右两侧的面为底面的棱柱,故 A 正确;题图②中水面面积比题图①中水面面积大,故 B 错误;倾斜过程中 A_1C_1 与水面所在平面不一定平行,故 C 错误;题图③中,水的体积不变,高 AB 不变,所以$\triangle AEH$ 的面积不变,从而 $AE\cdot AH$ 为定值,故 D 正确. 故选 AD.

(2)由题意,正方体的表面展开图,相对面之间一定相隔一个正方形,又展开图是里面朝上展平得到的,所以根据"上北下南,左西右东"可得下图,因此标"△"的面的方位是南. 故选 A.



题型二

例 2 (1)A (2)D **[解析]** (1)设直观图中的正方形为 $O'A'B'C'$(A'在 x'轴上),则有 $O'A'=1$,$O'B'=\sqrt{2}$,则对应在原图形中有 $OA\perp OB$,且 $OA=1$,$OB=2\sqrt{2}$,故选 A.

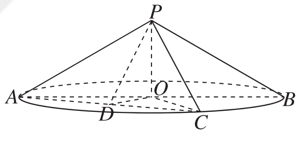
(2)因为直观图是等腰直角三角形 $A'B'C'$,$\angle B'A'C'=90°$,$A'O'=1$,所以 $A'C'=\sqrt{2}$,$A'C'$ // y'轴,根据原图形中平行于 y 轴的线段在直观图中仍平行于 y'轴,且长度变为原来的一半,可得 $AC=2\sqrt{2}$,AC // y 轴,所以$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高为 $AC=2\sqrt{2}$. 故选 D.

题型三

例 3 (1)B (2)C (3)AC **[解析]** (1)设底面半径均为 R,圆锥的母线长为 l,则 $l=\sqrt{3+R^2}$. 由题可知 $2\pi R\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 2\pi Rl$,解得 $l=2\sqrt{3}$,则 $\sqrt{3+R^2}=2\sqrt{3}$,∴$R=3$,∴圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$. 故选 B.

(2)设圆柱的底面半径为 r,由题意结合正弦定理有 $2r=\frac{2}{\sin 60°}$,解得 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,从而圆柱的高 $h=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,所以圆柱的体积 $V=\pi r^2h=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{6}\pi}{9}$. 故选 C.

(3)如图,取 AC 的中点 D,连接 OD,PD,PO,则 $OD\perp AC$,$PD\perp AC$,故$\angle PDO$ 为二面角 $P\text{-}AC\text{-}O$ 的平面角,得 $\angle PDO=45°$. 因为 $\angle APB=120°$,$PA=2$,所以 $AB=2\sqrt{3}$,$PO=1$,故圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{3})^2\times 1=\pi$,故 A 正确;$S_{圆锥侧}=\pi\times\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}\pi$,故 B 错误;由$\angle PDO=45°$,可得 $DO=1$,故 $AC=2\times\sqrt{3-1}=2\sqrt{2}$,故 C 正确;易知 $PO\perp DO$,由 $PO=1$,$DO=1$,得 $PD=\sqrt{2}$,则 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$,故 D 错误. 故选 AC.



变式 (1)B (2)C (3)D **[解析]** (1)由题意可知球心为圆柱的中心,则圆柱底面圆的半径 $r=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故圆柱的体积 $V=\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times 1=\frac{3\pi}{4}$.

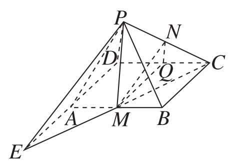
(2)由题意知,水库水位为海拔 148.5 m 时,相应水面(棱台的上底面)的面积为 140.0 km^2 $=140\times 10^6$ m^2,水库水位为海拔 157.5 m 时,相应水面(棱台的下底面)的面积为 180.0 km^2 $=180\times 10^6$ m^2,水面上升的高度为 $157.5-148.5=9$(m),所以增加的水量(棱台的体积)$V=\frac{1}{3}\times 9\times(140\times 10^6+\sqrt{140\times 10^6\times 180\times 10^6}+180\times 10^6)=3\times(320\times 10^6+60\sqrt{7}\times 10^6)\approx 3\times(320\times 10^6+60\times 2.65\times 10^6)=1.437\times 10^9\approx 1.4\times 10^9$($m^3$). 故选 C.

(3)设圆柱的半径为 r,由题意得 $\frac{r}{1}=\frac{1-x}{1}$,即 $r=1-x$,$0<x<1$,则圆柱的侧面积 $S=2\pi rx=2\pi(1-x)x(0<x<1)$,∵$S=2\pi(-x^2+x)=2\pi\left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$,∴当 $x=\frac{1}{2}$ 时,圆柱的侧面积 S 取得最大值$\frac{\pi}{2}$. 故选 D.

题型四

例 4 C **[解析]** 对于①,由 M,N 分别为 D_1C_1,A_1D_1 的中点易知 MN // AC,连接 AM,CN,由 $BP=\frac{2}{3}BD_1$,易得 AM,CN 交于点 P,即 $MN\subset$平面 APC,故①错误;对于②,由①可知 M,N 在平面 APC 上,连接 AN,由题易知 AN // C_1Q,$AN\subset$平面 APC,$C_1Q\not\subset$平面 APC,所以 C_1Q // 平面 APC,故②正确;对于③,由①知 A,P,M 三点共线,故③正确;对于④,由①知 $MN\subset$平面 APC,又 $MN\subset$平面 MNQ,$Q\notin$平面 APC,所以平面 MNQ 与平面 APC 相交,故④错误. 综上所述,②③正确,①④错误. 故选 C.

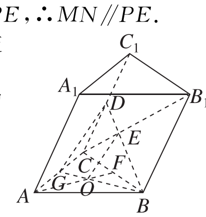
例 5 **证明:**(1)如图,取 DC 的中点 Q,连接 MQ,NQ. ∵NQ 是$\triangle PDC$ 的中位线,∴NQ // PD.



∵$NQ\not\subset$平面 PAD,$PD\subset$平面 PAD,
∴NQ // 平面 PAD.
∵M 是 AB 的中点,Q 是 DC 的中点,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,∴MQ // AD.
∵$MQ\not\subset$平面 PAD,$AD\subset$平面 PAD,∴MQ // 平面 PAD.
∵$NQ\subset$平面 MNQ,$MQ\subset$平面 MNQ,$MQ\cap NQ=Q$,∴平面 MNQ // 平面 PAD. ∵$MN\subset$平面 MNQ,∴MN // 平面 PAD.

(2)由(1)可得,平面 MNQ // 平面 PAD,又平面 $PEC\cap$平面 $MNQ=MN$,平面 $PAD\cap$平面 $PEC=PE$,∴MN // PE.

变式 **证明:**如图,连接 BO,并延长 BO 交 AC 于 G,连接 DG,

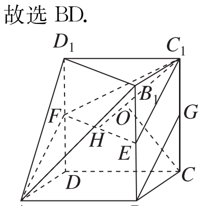


∵$AB=AC=6$,$AB\perp AC$,F 是棱 BC 的中点,∴$AF=3\sqrt{2}$,又 $AO=2\sqrt{2}$,
∴O 是$\triangle ABC$ 的重心,∴$\frac{BO}{OG}=2$.
∵D 是侧棱 CC_1 的中点,∴$BB_1=2CD$,
由$\triangle CDE\backsim\triangle B_1BE$ 得$\frac{BE}{ED}=\frac{BB_1}{CD}=2$,∴$\frac{BO}{OG}=\frac{BE}{ED}$,∴$OE$ // GD. 又 $OE\not\subset$平面 AA_1C_1C,$GD\subset$平面 AA_1C_1C,
∴OE // 平面 AA_1C_1C.

题型五

例 6 BD **[解析]** 因为 $PA\perp$平面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,所以 $PA\perp BC$,因为点 C 是以 AB 为直径的圆上异于 A,B 的任一点,所以 $BC\perp AC$,因为 $PA\cap AC=A$,PA,$AC\subset$平面 PAC,所以 $BC\perp$平面 PAC,因为 $BC\subset$平面 PBC,所以平面 $PAC\perp$平面 PBC,故 B,D 正确;因为 $PA\perp$平面 ABC,$AC\subset$平面 ABC,所以 $PA\perp AC$,则$\angle ACP$ 为锐角,即 AC 与 PC 不垂直,故 AC 与平面 PBC 不垂直,故 C 错误;假设 $AC\perp PB$,则由 $AC\perp BC$,$PB\cap BC=B$,PB,$BC\subset$平面 PBC,可得 $AC\perp$平面 PBC,由 C 选项分析可知不成立,故 A 错误. 故选 BD.

例 7 **证明:**(1)取 CC_1 的中点 G,连接 BG,AF,如图,

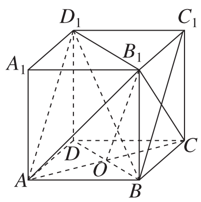


由 E 为 BB_1 的中点,四边形 BCC_1B_1 为正方形,可得四边形 BGC_1E 为平行四边形,则 BG // EC_1,
由 F 为 DD_1 的中点,结合正方体的性质可得 AF // BG,
所以 AF // EC_1,所以 A,F,C_1,E 四点共面,

故点 A 在平面 C_1EF 内.

(2)取 EF 的中点 H,连接 C_1H,如图,易证 $C_1E=C_1F$,
所以 $C_1H\perp EF$,又 O 为 $\triangle C_1EF$ 的重心,所以点 O 在线段 C_1H 上.
由点 E,F 分别是棱 BB_1,DD_1 的中点,
结合正方体的性质可得 $EF\parallel B_1D_1$,又 $D_1B_1\perp BB_1$,
所以 $EF\perp BB_1$,又 $CC_1\parallel BB_1$,所以 $EF\perp CC_1$.
因为 $CC_1,C_1H\subset$平面 CC_1O,$CC_1\cap C_1H=C_1$,
所以 $EF\perp$平面 CC_1O,又 $CO\subset$平面 CC_1O,
所以 $CO\perp EF$.

变式 **解**:(1)证明:如图,连接 BC_1,AD_1,BD,B_1D_1,因为 $AB\perp$平面 BCC_1B_1,$B_1C\subset$平面 BCC_1B_1,所以 $AB\perp B_1C$,又 $B_1C\perp BC_1$,且 $AB\cap BC_1=B$,$AB,BC_1\subset$平面 ABC_1D_1,



所以 $B_1C\perp$平面 ABC_1D_1,又 $BD_1\subset$平面 ABC_1D_1,所以 $B_1C\perp BD_1$.
因为 $B_1B\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,所以 $B_1B\perp AC$,
又 $BD\perp AC$,$B_1B\cap BD=B$,$B_1B,BD\subset$平面 BB_1D_1D,
所以 $AC\perp$平面 BB_1D_1D,又 $BD_1\subset$平面 BB_1D_1D,
所以 $AC\perp BD_1$. 又 $B_1C\cap AC=C$,$B_1C,AC\subset$平面 B_1AC,
所以 $BD_1\perp$平面 B_1AC.

(2)设 $BD\cap AC=O$,连接 B_1O,由 $B_1A=B_1C$,O 为 AC 的中点,得 $B_1O\perp AC$,且 $B_1O=\sqrt{OB^2+B_1B^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$,

所以 $S_{\triangle B_1AC}=\frac{1}{2}B_1O\cdot AC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}a\cdot\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2$.

设点 B 到平面 B_1AC 的距离为 h,由 $V_{B_1\text{-}ABC}=V_{B\text{-}B_1AC}$,得

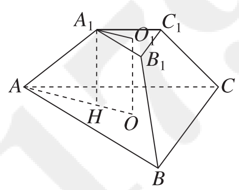
$\frac{1}{3}BB_1\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}h\cdot S_{\triangle B_1AC}$,

即 $\frac{a}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{h}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$,解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,

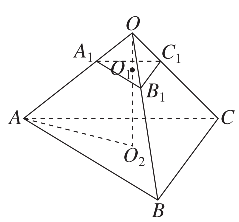
即点 B 到平面 B_1AC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

题型六

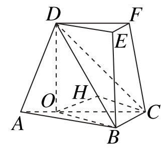
例 8 B **[解析]** 方法一:设正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的高为 h,由 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}$,$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$,$V_{正三棱台ABC\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}h(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\triangle ABC}S_{\triangle A_1B_1C_1}})=\frac{52}{3}$,解得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 设 O_1,O 分别为 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle ABC$ 的中心,如图,连接 A_1O_1,OO_1,AO,过 A_1 作 $A_1H\perp AO$ 于 H,易知 $A_1H\perp$平面 ABC,$\angle A_1AH$ 即为 A_1A 与平面 ABC 所成的角. 易知 $AH=AO-A_1O_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\times6-\frac{\sqrt{3}}{3}\times2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,$A_1H=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,所以 $\tan\angle A_1AH=\frac{A_1H}{AH}=1$.



方法二:设正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的高为 h. 如图,延长 AA_1,BB_1,CC_1,则三条直线交于一点 O,设 O_1,O_2 分别为 $\triangle A_1B_1C_1$,$\triangle ABC$ 的中心,连接 OO_2,则 O_1 在线段 OO_2 上,$OO_2\perp$平面 ABC,连接 AO_2,则 $\angle OAO_2$ 即为 AA_1 与平面 ABC 所成的角. 由题知 $AB=3A_1B_1$,得 $OO_1=\frac{1}{2}h$,$OO_2=\frac{3}{2}h$. 由题得 $S_{\triangle ABC}=9\sqrt{3}$,$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\sqrt{3}$,由 $\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times\frac{3}{2}h-\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}h=\frac{52}{3}$,得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,易知 $AO_2=2\sqrt{3}$,所以 $\tan\angle OAO_2=\frac{\frac{3}{2}h}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}h=1$.



例 9 **解**:(1)证明:如图,过点 D 作 $DO\perp AC$,交直线 AC 于点 O,连接 OB.
由 $\angle ACD=45°$,$DO\perp AC$ 得 $CD=\sqrt{2}CO$,
由平面 $ACFD\perp$平面 ABC,平面 $ACFD\cap$平面 $ABC=AC$,$DO\subset$平面 $ACFD$,得 $DO\perp$平面 ABC,



又 $BC\subset$平面 ABC,所以 $DO\perp BC$.
由 $\angle ACB=45°$,$BC=\frac{1}{2}CD=\frac{\sqrt{2}}{2}CO$ 得 $BO\perp BC$.
因为 $BO\cap DO=O$,所以 $BC\perp$平面 BDO,
又 $DB\subset$平面 BDO,故 $BC\perp DB$.
由三棱台 $ABC\text{-}DEF$ 得 $BC\parallel EF$,所以 $EF\perp DB$.

(2)如图,过点 O 作 $OH\perp BD$,交直线 BD 于点 H,连接 CH.
由三棱台 $ABC\text{-}DEF$ 得 $DF\parallel CO$,
所以直线 DF 与平面 DBC 的夹角等于直线 CO 与平面 DBC 的夹角.
由 $BC\perp$平面 BDO,$OH\subset$平面 BDO 得 $OH\perp BC$,
又 $BC\cap BD=B$,故 $OH\perp$平面 BCD,
所以$\angle OCH$ 为直线 CO 与平面 DBC 的夹角.
设 $CD=2\sqrt{2}$.
由题意得 $DO=OC=2$,$BO=BC=\sqrt{2}$,由 $DO\perp$平面 ABC,$BO\subset$平面 ABC,得 $DO\perp BO$,

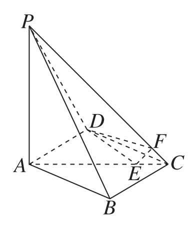
则 $BD=\sqrt{6}$,$OH=\frac{2}{3}\sqrt{3}$,

所以 $\sin\angle OCH=\frac{OH}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

因此,直线 DF 与平面 DBC 的夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

变式 **解**:(1)证明:$\because PA\perp$平面 $ABCD$,$AD\subset$平面 $ABCD$,
$\therefore PA\perp AD$.
又$\because AD\perp PB$,$PB\cap PA=P$,$PB,PA\subset$平面 PAB,
$\therefore AD\perp$平面 PAB,$\because AB\subset$平面 PAB,$\therefore AD\perp AB$.
在$\triangle ABC$ 中,$AB^2+BC^2=AC^2$,$\therefore AB\perp BC$.
$\because A,B,C,D$ 四点共面,$\therefore AD\parallel BC$,
又$\because BC\subset$平面 PBC,$AD\not\subset$平面 PBC,
$\therefore AD\parallel$平面 PBC.

(2)如图所示,过点 D 作 $DE\perp AC$ 于 E,过点 E 作 $EF\perp CP$ 于 F,连接 DF.
$\because PA\perp$平面 $ABCD$,$PA\subset$平面 PAC,
$\therefore$平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$,
又平面 $PAC\cap$平面 $ABCD=AC$,$DE\perp AC$,$\therefore DE\perp$平面 PAC.
又 $CP\subset$平面 PAC,$\therefore DE\perp CP$,又 $EF\perp CP$,$DE\cap EF=E$,$\therefore CP\perp$平面 DEF,得 $DF\perp CP$,



根据二面角的定义可知,$\angle DFE$ 即为二面角 $A\text{-}CP\text{-}D$ 的平面角,

即 $\sin\angle DFE=\frac{\sqrt{42}}{7}$,又$\angle DFE$ 为锐角,$\therefore\tan\angle DFE=\sqrt{6}$.

设 $AD=x(0<x<2)$,则 $CD=\sqrt{4-x^2}$,由等面积法可得,

$DE=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$,

则 $CE=\sqrt{(4-x^2)-\frac{x^2(4-x^2)}{4}}=\frac{4-x^2}{2}$,又$\triangle EFC$ 为等腰直角三角形,$\therefore EF=\frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}$,

故 $\tan\angle DFE=\frac{DE}{EF}=\frac{\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}}{\frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{6}$,解得 $x=\sqrt{3}$,即 $AD=\sqrt{3}$.